Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Déterminer les endomorphismes f de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté tels que :
$\forall\, u, v \in E,\ f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (euclidien) d'équations $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$

Déterminer la projection orthogonale sur F, par deux méthodes différentes.

Calculer la distance $d(u,F)$ d'un vecteur u de $\mathbb{R}^4$ au sous-espace F.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit E un espace vectoriel euclidien.
Soit f un endomorphisme de E qui “conserve l'orthogonalité”, c'est-à-dire tel que, pour tous vecteurs u et v de E, $< u, v > = 0 \Rightarrow < f(u), f(v) > = 0$.
Montrer qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que, pour tout vecteur u de E, $\|f(u)\| = \lambda \|u\|$.
Si $\lambda > 0$, on dit alors que f est une *similitude* de rapport λ.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$.
Soit f^* l'adjoint de f. Montrer que $\operatorname{Ker}(f+f^*) = \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(f^*)$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u \circ u^* = u^* \circ u$.

1. Montrer que u et u^* ont le même noyau.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(u^*)$, et que pour toute valeur propre λ les sous-espaces propres de u et de u^* pour λ sont identiques.
3. Montrer que les sous-espaces propres de u sont orthogonaux deux à deux.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Écarter la solution évidente $f = 0$.

Appliquer l'hypothèse aux vecteurs e_1, e_2, e_3 d'une base orthonormée directe.

Montrer que les $f(e_k)$ sont orthogonaux deux à deux, puis qu'ils sont unitaires.

Montrer que f est une rotation, puis établir la réciproque.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

- Première méthode :

  Soit $v = (x', y', z', t')$ la projection orthogonale de $u = (x, y, z, t)$ sur F.

  Montrer que $F^{\perp}$ est engendré par $a = (1, 1, 1, 1)$ et $b = (1, -1, 1, -1)$.

  Trouver λ, μ tels que $v - u = \lambda a + \mu b$. La distance de u à F est donnée par $d^2 = \|v - u\|^2$.

- Deuxième méthode :

  Montrer que $c = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$ et $d = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)$ forment une base ortonormée de F.

  En déduire que $v = p(u) =< c, u > c+ < d, v > d$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Se donner une base orthonormée $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ de E.

Remarquer que les $f(e_j)$ sont orthogonaux deux à deux.

Considérer les $e_i + e_j$ et $e_i - e_j$, avec $i \neq j$, et en déduire que les e_k ont même norme..

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Si $x \in \text{Ker}\,(f + f^*)$, montrer que $f^*(x) = \overrightarrow{0}$. En déduire $f(x) = \overrightarrow{0}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. Pour tout x de E, montrer que $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
2. Pour tout λ, appliquer ce qui précède à $v = u - \lambda Id$.
3. Se donner deux valeurs propres distinctes et deux vecteurs propres associés x et y.

   Considérer $< u(x), y >$ et en déduire l'orthogonalité de x et y.