Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit E un espace préhilbertien réel.
Montrer que pour tous x, y de E, $2 + \|x+y\|^2 \leq 2(1+\|x\|^2)(1+\|y\|^2)$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer la valeur minimum de $I_{a,b} = \displaystyle\int_0^1 (t\ln t - at - b)^2\,\mathrm{d}t$ et dire pour quelles valeurs de a et b ce minimum est atteint.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe n vecteurs unitaires $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tels que, pour tout vecteur x de E, on ait $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < e_k, x >^2$.

1. Montrer que les vecteurs e_k sont orthogonaux deux à deux.
2. Montrer que ces vecteurs forment une base orthonormée de E.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $< P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
Soit φ la forme linéaire sur E définie par $\varphi(P) = P(0)$.
Montrer qu'il n'existe pas de vecteur A de E tel que, pour tout P de E, $\varphi(P) =< A, P >$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$. Soit p un projecteur de E.
Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) Le noyau de p et l'image de p sont deux sous-espaces orthogonaux.

b) Pour tout vecteur x de E, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Que devient ce résultat si E est euclidien, c'est-à-dire si E est de dimension finie ?

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.