Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit E un espace préhilbertien réel.

Montrer que pour tous x, y de E, $2 + \|x + y\|^2 \leq 2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2)$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Calculer la valeur minimum de $I_{a,b} = \displaystyle\int_0^1 (t \ln t - at - b)^2 \, dt$ et dire pour quelles valeurs de a et b ce minimum est atteint.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe n vecteurs unitaires $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tels que, pour tout vecteur x de E, on ait $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < e_k, x >^2$.

1. Montrer que les vecteurs e_k sont orthogonaux deux à deux.
2. Montrer que ces vecteurs forment une base orthonormée de E.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $< P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t) \, dt$.

Soit φ la forme linéaire sur E définie par $\varphi(P) = P(0)$.

Montrer qu'il n'existe pas de vecteur A de E tel que, pour tout P de E, $\varphi(P) =< A, P >$.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$. Soit p un projecteur de E.

Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) Le noyau de p et l'image de p sont deux sous-espaces orthogonaux.

b) Pour tout vecteur x de E, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Que devient ce résultat si E est euclidien, c'est-à-dire si E est de dimension finie ?