

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un espace préhilbertien réel.

Montrer que pour tous x, y de E , $2 + \|x + y\|^2 \leq 2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2)$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer la valeur minimum de $I_{a,b} = \int_0^1 (t \ln t - at - b)^2 dt$ et dire pour quelles valeurs de a et b ce minimum est atteint.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un espace préhilbertien sur \mathbb{R} .

On suppose qu'il existe n vecteurs unitaires e_1, e_2, \dots, e_n tels que, pour tout vecteur x de E , on ait $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle^2$.

1. Montrer que les vecteurs e_k sont orthogonaux deux à deux.
2. Montrer que ces vecteurs forment une base orthonormée de E .

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

Soit φ la forme linéaire sur E définie par $\varphi(P) = P(0)$.

Montrer qu'il n'existe pas de vecteur A de E tel que, pour tout P de E , $\varphi(P) = \langle A, P \rangle$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un espace préhilbertien sur \mathbb{R} . Soit p un projecteur de E .

Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Le noyau de p et l'image de p sont deux sous-espaces orthogonaux.
- b) Pour tout vecteur x de E , $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Que devient ce résultat si E est euclidien, c'est-à-dire si E est de dimension finie ?