

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un espace préhilbertien sur \mathbb{K} . Soient u, v deux vecteurs de E .

On suppose que, pour tout λ de \mathbb{K} , $\|u + \lambda v\| \geq \|u\|$.

Montrer que u et v sont orthogonaux.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un espace préhilbertien sur \mathbb{C} . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E, \langle f(x), x \rangle = 0$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Dans l'espace E préhilbertien réel, soit f une application telle que $f(0) = 0$ et

(1) : $\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

1. Montrer que f conserve le produit scalaire.
2. En déduire que f est linéaire.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un espace préhilbertien sur \mathbb{C} .

Montrer que $\forall (u, v) \in E^2, \langle u, v \rangle = \frac{1}{2} [\|u + v\|^2 + i \|u + iv\|^2 - (1 + i) \|u\|^2 + \|v\|^2]$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un espace préhilbertien, et soit f une application de E dans E telle que, pour tous vecteurs x et y : $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

Montrer que f est linéaire.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Élever au carré, trouver $2\operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle) + |\lambda|^2 \|v\|^2 \geq 0$.

Choisir ensuite $\lambda = r \langle v, u \rangle$, avec r réel.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Se donner x, y quelconques dans E .

Développer $\langle f(x + iy), x + iy \rangle$ et $\langle f(x + y), x + y \rangle$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Vérifier que f conserve la norme, puis développer $\|f(x) - f(y)\|^2$.

2. Se donner deux vecteurs x, y et deux scalaires α, β .

Développer $\|f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)\|^2$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

On sait que $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle + \|v\|^2$.

Développer également $\|u + iv\|^2$, puis former $\|u + v\|^2 + i\|u + iv\|^2$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Se donner x, y, z dans E , et α et β dans \mathbb{K} .

Vérifier que $\langle z, f(\alpha x + \beta y) \rangle = \langle z, \alpha f(x) + \beta f(y) \rangle$.