Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

On se donne une suite (P_n) de fonctions polynômiales à coefficients réels. On suppose que la suite (P_n) est uniformément convergente sur un intervalle I non borné de $\mathbb{R}$.

Montrer que la fonction limite P est un polynôme, et que les différences $P_n - P$ sont des polynômes constants à partir d'un certain entier n.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x^2 \exp(-\sin \dfrac{x}{n})$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ deux suites uniformément convergentes d'applications continues sur le segment $I = [a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Montrer que la suite $(f_n g_n)$ est CVU sur $[a, b]$.

Donner un contre-exemple montrant que la propriété est fausse si I n'est pas un segment.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence de la suite (f_n) définie par : $\forall n \geq 1, \forall x \geq 0, f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Montrer qu'il existe m tel que $P_n - P_m$ soit égal à une constante λ_n pour $n \geq m$.

Montrer que la suite (λ_n) est convergente.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$, vers $f : x \to x^2$.

Montrer qu'il y a CVU sur toute partie bornée de $\mathbb{R}$ (accroissements finis.)

En choisissant $x = x_n = \frac{n\pi}{2}$, vérifier qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

- Utiliser $\|fg - f_n g_n\|_\infty =\leq \|f - f_n\|_\infty \|g\|_\infty + \|f_n\|_\infty \|g - g_n\|_\infty$.
- Considérer $f_n(x) = g_n(x) = x + \frac{1}{n}$ sur $I = \mathbb{R}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

- Vérifier que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : x \to \mathrm{e}^x$.
- En utilisant $x_n = n$, montrer qu'il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}^+$.

  On prouvera en revanche qu'il y a CVU sur $[0, a]$, pour tout $a > 0$.

  Pour cela, on considérera l'application $x \mapsto \varphi_n(x) = f(x) - f_n(x) = \mathrm{e}^x - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

  On montrera que φ_n, qui est nulle en 0, est croissante sur $\mathbb{R}^+$.