

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que si la suite de fonctions (f_n) est uniformément convergente, il en est de même de la suite de fonctions $(g_n = \sin f_n)$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , et telle que $f(1) = 0$.

On définit les applications f_n sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = x^n f(x)$.

Étudier la convergence de la suite (f_n) .

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On définit une suite de polynômes (P_n) par : $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(x - P_n^2)$.

1. Montrer que $P_{n+1} - \sqrt{x} = (P_n - \sqrt{x}) \left(1 - \frac{P_n + \sqrt{x}}{2}\right)$
2. Exprimer de même $P_{n+1} + \sqrt{x}$ en fonction de $P_n + \sqrt{x}$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1] \sqrt{x} \leq P_{n+1}(x) \leq P_n(x) \leq 1$.
4. Montrer que la suite (P_n) est simplement convergente, sur $[0, 1]$ vers $f : x \rightarrow \sqrt{x}$.
5. Préciser la monotonie des applications $x \rightarrow P_n(x) - \sqrt{x}$ et $x \rightarrow P_n(x) + \sqrt{x}$.
6. Montrer que la convergence de la suite (P_n) est uniforme.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit $(P_n)_{n \geq 0}$ une suite de polynômes, tous de degré inférieur ou égal à m .

On suppose que la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ est simplement convergente sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$, vers une application f . Montrer que f est aussi un polynôme de degré inférieur ou égal à m , et que la convergence de la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ est uniforme.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Justifier et utiliser l'inégalité : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Se donner $\varepsilon > 0$, et $\alpha \in]0, 1[$ tel que $x \in [1 - \alpha, 1] \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$.

Montrer que la suite (f_n) est uniformément convergente vers la fonction nulle.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

– On trouve $P_{n+1} + \sqrt{x} = P_n + \sqrt{x} \left(1 - \frac{P_n - \sqrt{x}}{2}\right)$.

– Pour la question 3, procéder par récurrence.

Si c'est vrai au rang n , vérifier que $P_{n+1}(x) \leq P_n(x) \leq 1$ et $\frac{P_n(x) + \sqrt{x}}{2} \leq 1$.

– Utiliser un théorème de convergence des suites monotones.

Passer à la limite dans la relation de récurrence définissant les P_n .

– Procéder par récurrence.

Montrer que $x \rightarrow \varphi_n(x) = P_n(x) + \sqrt{x}$ est croissante.

De même, montrer que $x \rightarrow \psi_n(x) = P_n(x) - \sqrt{x}$ est décroissante.

– Utiliser l'encadrement $0 \leq P_n(x) - \sqrt{x} \leq P_n(0)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

L'idée est d'utiliser l'interpolation de Lagrange pour $m + 1$ points distincts de $[a, b]$.

Se donner $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ distincts dans $[a, b]$.

Noter L_0, L_1, \dots, L_m les polynômes interpolateurs associés aux λ_k .

Pour tout n de \mathbb{N} , $P_n(x) = \sum_{k=0}^m P_n(\lambda_k) L_k(x)$.

Faire tendre n vers $+\infty$, à x fixé, et constater que $f = \lim P_n$ est un polynôme de degré $\leq m$.

Justifier l'existence de $M \in \mathbb{R}^+$, tel que : $\forall k \in \{0, \dots, m\}, \forall x \in [a, b], |L_k(x)| \leq M$.

En déduire que sur $[a, b]$ on a $|f(x) - P_n(x)| \leq M \sum_{k=0}^m |f(\lambda_k) - P_n(\lambda_k)|$.