

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \frac{n(x^3 + x)}{nx + 1} e^{-x}.$$

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions  $(f_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = n^k x^2 e^{-nx}, \text{ où } k \text{ est un réel donné.}$$

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions  $(f_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \frac{n^3 x}{n^4 + x^4}.$$

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , lipschitziennes de même rapport  $M \geq 0$ .

On suppose que la suite  $(f_n)$  est simplement convergente sur  $[a, b]$ , vers une application  $f$ .

Montrer que la convergence est uniforme.

**EXERCICE 5** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions  $(f_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \frac{x}{n(1 + x^n)}.$$

## Indications ou résultats

### INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

- Montrer que la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  est CVS sur  $\mathbb{R}^+$  vers  $f : x \mapsto \begin{cases} (x^2 + 1)e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
- Il n'y a pas CVU sur  $[0, a]$ , pour tout  $a > 0$ .  
Montrer qu'il y a CVU sur  $[a, +\infty[$ .  
On montrera que  $\forall x \geq a > 0, 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{e^{(na+1)}}$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

- Se limiter à  $x \geq 0$ . Montrer que la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  est CVS sur  $\mathbb{R}^+$  vers 0.
- Étudier les variations de  $f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$ .  
Montrer que si  $k < 2$ , il y a CVU sur  $\mathbb{R}^+$  vers 0.  
Si  $k \geq 2$ , montrer qu'il y a CVU sur tout intervalle  $[a, +\infty[$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

- Montrer que la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  est simplement convergente, sur  $\mathbb{R}^+$ , vers la fonction nulle.
- Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur  $\mathbb{R}^+$ .  
Montrer qu'il y a CVU vers 0 sur tout intervalle  $[0, a]$ , avec  $a > 0$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

- On traite le cas particulier  $f = 0$ .  
Se donner  $\varepsilon > 0$  et une subdivision  $(x_k)$  de  $[a, b]$  de pas inférieur à  $\varepsilon$ .  
En déduire qu'il existe  $n_0$  tel que  $n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x)| \leq (M + 1)\varepsilon$ .
- Dans le cas général, montrer que  $f$  est  $M$ -lipschitzienne sur  $[a, b]$ .  
Considérer alors les applications  $g_n = f - f_n$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

- Sur  $[0, 1]$ , minorer  $1 + x^n$  par 1. Sur  $[1, +\infty[$ , minorer  $1 + x^n$  par  $x^n$ .