Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = \dfrac{n(x^3+x)}{nx+1}\,\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions (f_n) définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = n^k x^2 \mathrm{e}^{-nx}$, où k est un réel donné.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = \dfrac{n^3 x}{n^4+x^4}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, lipschtiziennes de même rapport $M \geq 0$.

On suppose que la suite (f_n) est simplement convergente sur $[a,b]$, vers une application f.

Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+x^n)}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

– Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : x \mapsto \begin{cases} (x^2+1)\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
– Il n'y a pas CVU sur $[0, a]$, pour tout $a > 0$.
  Montrer qu'il y a CVU sur $[a, +\infty[$.
  On montrera que $\forall x \geq a > 0,\ 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{\mathrm{e}(na+1)}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

– Se limiter à $x \geq 0$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers 0.
– Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$.
  Montrer que si $k < 2$, il y a CVU sur $\mathbb{R}^+$ vers 0.
  Si $k \geq 2$, montrer qu'il y a CVU sur tout intervalle $[a, +\infty[$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

– Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est simplement convergente, sur $\mathbb{R}^+$, vers la fonction nulle.
– Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
  Montrer qu'il y a CVU vers 0 sur tout intervalle $[0, a]$, avec $a > 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

– On traite le cas particulier $f = 0$.
  Se donner $\varepsilon > 0$ et une subdivision (x_k) de $[a, b]$ de pas inférieur à ε.
  En déduire qu'il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \leq (M+1)\varepsilon$.
– Dans le cas général, montrer que f est M-lispchitzienne sur $[a, b]$.
  Considérer alors les applications $g_n = f - f_n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Sur $[0, 1]$, minorer $1 + x^n$ par 1. Sur $[1, +\infty[$, minorer $1 + x^n$ par x^n.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.