

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \frac{n(x^3 + x)}{nx + 1} e^{-x}.$$

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = n^k x^2 e^{-nx}, \text{ où } k \text{ est un réel donné.}$$

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \frac{n^3 x}{n^4 + x^4}.$$

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , lipschitziennes de même rapport $M \geq 0$.

On suppose que la suite (f_n) est simplement convergente sur $[a, b]$, vers une application f .

Montrer que la convergence est uniforme.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \frac{x}{n(1 + x^n)}.$$

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

- Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est CVS sur \mathbb{R}^+ vers $f : x \mapsto \begin{cases} (x^2 + 1)e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
- Il n'y a pas CVU sur $[0, a]$, pour tout $a > 0$.
Montrer qu'il y a CVU sur $[a, +\infty[$.
On montrera que $\forall x \geq a > 0, 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{e^{(na+1)}}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

- Se limiter à $x \geq 0$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est CVS sur \mathbb{R}^+ vers 0.
- Étudier les variations de f_n sur \mathbb{R}^+ .
Montrer que si $k < 2$, il y a CVU sur \mathbb{R}^+ vers 0.
Si $k \geq 2$, montrer qu'il y a CVU sur tout intervalle $[a, +\infty[$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

- Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est simplement convergente, sur \mathbb{R}^+ , vers la fonction nulle.
- Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur \mathbb{R}^+ .
Montrer qu'il y a CVU vers 0 sur tout intervalle $[0, a]$, avec $a > 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

- On traite le cas particulier $f = 0$.
Se donner $\varepsilon > 0$ et une subdivision (x_k) de $[a, b]$ de pas inférieur à ε .
En déduire qu'il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x)| \leq (M + 1)\varepsilon$.
- Dans le cas général, montrer que f est M -lipschitzienne sur $[a, b]$.
Considérer alors les applications $g_n = f - f_n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

- Sur $[0, 1]$, minorer $1 + x^n$ par 1. Sur $[1, +\infty[$, minorer $1 + x^n$ par x^n .