

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Sachant que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Pour tout x de $] -1, 1[$, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

1. Calculer la limite quand n tend vers l'infini de $s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
2. Retrouver ainsi la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Nature et somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{2n\pi}{3}$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Nature et somme de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $n \geq 0$.

EXERCICE 6 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Nature et somme de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$, $n \geq 2$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Poser $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$, $T_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n-1)^2}$ et $U_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Vérifier que $S_{2N} = \frac{1}{4}S_N + T_N$ et que $U_{2N} = \frac{1}{4}S_N - T_N$.

En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Poser $\varphi_N(x) = \ln(1-x) + \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{n}$ sur $] -1, 1[$.

Avec l'inégalité des accroissements finis, montrer que $|\varphi_N(x)| \leq \frac{|x|^{N+1}}{1-|x|}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Utiliser une somme de Riemann. On trouve $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2$.

2. Montrer que si $n \geq 1$, $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = s_n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Vérifier que $S_{3N} = -\frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{3N} \frac{1}{n}$, puis (somme de Riemann) que $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{3N} = -\frac{1}{2} \ln 3$.

Obtenir finalement l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{2n\pi}{3} = -\frac{1}{2} \ln 3$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Évoquer tout d'abord le critère spécial des séries alternées.

Prouver que $S_N = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} dx$. En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Remarquer que $u_{2n} + u_{2n+1} = 0$. En déduire $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$.