

## Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Sachant que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , calculer  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Pour tout  $x$  de  $] -1, 1[$ , montrer que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ .

EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

1. Calculer la limite quand  $n$  tend vers l'infini de  $s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ .
2. Retrouver ainsi la valeur de la somme  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ .

EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Nature et somme de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{2n\pi}{3}$ .

EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Nature et somme de la série de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ,  $n \geq 0$ .

EXERCICE 6 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Nature et somme de la série de terme général  $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ ,  $n \geq 2$ .

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [[Retour à l'énoncé](#)]

$$\text{Poser } S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}, T_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n-1)^2} \text{ et } U_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

$$\text{Vérifier que } S_{2N} = \frac{1}{4}S_N + T_N \text{ et que } U_{2N} = \frac{1}{4}S_N - T_N.$$

$$\text{En déduire } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [[Retour à l'énoncé](#)]

$$\text{Poser } \varphi_N(x) = \ln(1-x) + \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{n} \text{ sur } ]-1, 1[.$$

$$\text{Avec l'inégalité des accroissements finis, montrer que } |\varphi_N(x)| \leq \frac{|x|^{N+1}}{1-|x|}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [[Retour à l'énoncé](#)]

1. Utiliser une somme de Riemann. On trouve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2$ .

2. Montrer que si  $n \geq 1$ ,  $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = s_n$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

$$\text{Vérifier que } S_{3N} = -\frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{3N} \frac{1}{n}, \text{ puis (somme de Riemann) que } \lim_{N \rightarrow \infty} S_{3N} = -\frac{1}{2} \ln 3.$$

$$\text{Obtenir finalement l'égalité } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{2n\pi}{3} = -\frac{1}{2} \ln 3.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [[Retour à l'énoncé](#)]

Évoquer tout d'abord le critère spécial des séries alternées.

$$\text{Prouver que } S_N = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} dx. \text{ En déduire } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [[Retour à l'énoncé](#)]

$$\text{Remarquer que } u_{2n} + u_{2n+1} = 0. \text{ En déduire } \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0.$$