

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

A l'aide d'une série alternée, montrer que e est un irrationnel.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$, où $u_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}}$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit $\sum u_n$ une série réelle, convergente mais non absolument convergente.

Pour tout n , on pose $u_n^+ = \sup(u_n, 0)$ et $u_n^- = \sup(-u_n, 0)$.

Montrer que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont divergentes.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$, avec $u_n = \ln \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n + \alpha}} \right)$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit z un nombre complexe de module 1, mais tel que $z \neq 1$.

1. Pour tout entier n , on pose $T_n = \sum_{k=0}^n z^k$. Montrer que $|T_n| \leq \frac{2}{|1-z|}$.
2. En déduire que pour $N \geq 1$ et $p \geq 1$, on a : $\left| \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{z^n}{n} \right| \leq \frac{4}{(N+1)|1-z|}$.
3. Montrer que la série $\sum \frac{z^n}{n}$ est convergente.

EXERCICE 6 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Pour tout complexe z vérifiant $|z| < 1$, calculer $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, avec $u_n = nz^n$.