# Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [ Indication ] [ Correction ]

A l'aide d'une série alternée, montrer que e est un irrationnel.

EXERCICE 2 [ Indication ] [ Correction ]

Nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$, où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}}$.

EXERCICE 3 [ Indication ] [ Correction ]

Soit $\sum u_n$ une série réelle, convergente mais non absolument convergente.
Pour tout $n$, on pose $u_n^+ = \sup(u_n, 0)$ et $u_n^- = \sup(-u_n, 0)$.
Montrer que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont divergentes.

EXERCICE 4 [ Indication ] [ Correction ]

Nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}}\right)$.

EXERCICE 5 [ Indication ] [ Correction ]

Soit $z$ un nombre complexe de module 1, mais tel que $z \neq 1$.

1. Pour tout entier $n$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$. Montrer que $|T_n| \leq \dfrac{2}{|1-z|}$.
2. En déduire que pour $N \geq 1$ et $p \geq 1$, on a : $\left|\displaystyle\sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{z^n}{n}\right| \leq \dfrac{4}{(N+1)\,|1-z|}$.
3. Montrer que la série $\sum \dfrac{z^n}{n}$ est convergente.

EXERCICE 6 [ Indication ] [ Correction ]

Pour tout complexe $z$ vérifiant $|z| < 1$, calculer $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, avec $u_n = nz^n$.