Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Préciser la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^+$. On suppose que la série $\sum n^2 u_n^2$ converge.
Montrer qu'il en est de même de la série $\sum u_n$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Nature de la série $\sum u_n$, où $u_0 \in \mathbb{R}$ et où pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}\exp(-u_{n-1})$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^+$ telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.
Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes réels strictement positifs.
On suppose que pour $n \geq n_0$, on a l'inégalité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
Montrer que si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Pour tout $\alpha > 1$, trouver un équivalent du reste $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$, avec $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

Pour $0 < \alpha < 1$ trouver un équivalent quand $N \to \infty$ de $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$, avec $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.