Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}\right)$, où $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \displaystyle\int_0^x \exp(t^2 - x^2)\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

EXERCICE 6 [Indication] [Correction]

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$.

1. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?
2. Montrer que f satisfait à l'équation différentielle $(1 - x^2)y' - xy = 1$.
3. En déduire une expression de f.

EXERCICE 7 [Indication] [Correction]

Développement en série entière de $f(x) = (\arcsin x)^2$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $f(x) = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{(i-1)x}$. En déduire $\mathrm{e}^{-x} \sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \sin \frac{3n\pi}{4} x^n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $f'(x) = \operatorname{Im}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{1 - x\mathrm{e}^{i\alpha}}\right)$. En déduire $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} x^n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Noter que $f(x) = \dfrac{1-x}{1-x^3}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2xf(x) + 1$.

Poser $y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. On trouve $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ et $a_n = -\dfrac{2}{n} a_{n-2}$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Au voisinage de 0, écrire $f(x) = \ln(2-x) + \ln(3-x)$.

En déduire $f(x) = \ln 2 + \ln 3 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \frac{x^n}{n}$ pour $|x| < 2$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

1. Le rayon de convergence de la série entière définissant f est 1.
2. Montrer que f est solution de $(1-x^2)y' - xy = 1$ sur $]-1, 1[$.
3. Résoudre l'équation homogène, puis utiliser la méthode de variation de la constante.

   Trouver finalement : $\forall x \in]-1, 1[\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $(1-x^2)f''(x) = 2 + xf'(x)$. En déduire $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!} x^{2n}$.