

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Rayon de convergence, et somme, de la série entière  $\sum a_n z^n$ , avec  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (2 + (-1)^n)^n$ .

**EXERCICE 2** [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Rayon de convergence  $R$  et somme  $S$  de la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2n+1}$ .

**EXERCICE 3** [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Rayon de convergence, et somme sur l'intervalle ouvert de convergence, de  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n\theta}{n} x^n$ .

**EXERCICE 4** [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Rayon de convergence  $R$  et somme  $S$  de la série entière  $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$  où  $a_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)$ .

NB : on donnera deux méthodes différentes.

**EXERCICE 5** [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

On considère une série entière  $\sum a_n x^n$ , de rayon de convergence 1, de somme  $S(x)$ .

On suppose que la série  $\sum a_n$  est convergente, et on veut montrer que la série  $\sum a_n x^n$  est uniformément convergente sur le segment  $[0, 1]$ .

1. Traiter le cas particulier où les  $a_n$  sont tous positifs ou nuls.
2. Traiter le cas où  $a_n = (-1)^n \lambda_n$ , la suite  $(\lambda_n)$  étant décroissante et convergente vers 0.
3. Traiter le cas général. On pourra poser  $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$  pour tout entier  $n$ .
4. Que peut on en déduire pour  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  sur  $[0, 1]$ , et notamment pour  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  ?

**EXERCICE 6** [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

On pose  $a_0 > 0$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ .

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum a_n x^n$ .
2. Montrer que la série entière converge en  $x = -1$ .
3. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right)$ . En déduire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 2$ . Conclusion ?



## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Le rayon de convergence est égal à  $\frac{1}{3}$ . On trouve  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{1-9x^2}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On a  $R = 1$ . Poser  $T(x) = xS(x^2)$  et calculer  $T'(x)$ .

En déduire  $S(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$  sur  $]0, 1[$ . Sur  $] -1, 0[$ , considérer  $U(x) = xS(-x^2)$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Poser  $u_n(x) = \operatorname{Im} \frac{(xe^{i\theta})^n}{n}$ . Montrer que  $U'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \frac{\cos \theta - x}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$ .

Obtenir finalement  $\forall x \in ] -1, 1[$ ,  $U(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2x \cos \theta + x^2)$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

– On a  $a_n = \operatorname{Re} b_n$ , avec  $b_n = \frac{1+i}{n\sqrt{2}} i^n$ . Montrer que  $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (ix)^n$ .

Dériver  $T(x)$ , puis intégrer les parties réelle et imaginaire de  $T'(x)$ .

En déduire  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\arctan x + \ln \sqrt{1+x^2})$ .

– Calculer  $a_{2p}$  et  $a_{2p+1}$ . Séparer en deux séries et reconnaître deux séries classiques.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

3. Vérifier que  $S_{n,p}(x) = \sum_{k=n+1}^p a_k x^k = r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} r_k (x^{k+1} - x^k) - r_p x^p$ .

Montrer que la série  $\sum a_n x^n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

4. On en déduit  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Montrer que la suite  $(a_n)$  est convergente vers  $\ell = 0$ . En déduire  $R = 1$ .

2. Pour  $x = -1$ , utiliser le critère spécial des séries alternées.

3. Montrer que  $a_n - \ln(1 + a_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a_n^2}{2}$ .

Utiliser la convergence au sens de Césaro pour  $u_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}$ .