



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n \geq 0} n^3 x^n$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n^2 - 1}$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{nx^n}{(2n + 1)!}$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 4n - 1}{n + 2} \frac{x^n}{n!}$.

EXERCICE 6 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{4n}}{4n + 1}$.

EXERCICE 7 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{3n + 2}$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Le rayon de convergence est 1. Pour calculer la somme, procéder par dérivation de $\sum x^n$. Décomposer X^3 sur la base $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$\text{En déduire } S(x) = \frac{x(x^2 + 4x + 1)}{(1-x)^4}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On a $R = +\infty$. Utiliser $n^3 = n + 3n(n-1) + n(n-1)(n-2)$. En déduire $S(x) = (x + 3x^2 + x^3)e^x$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

On a $R = 1$. Utiliser le DSE de $\ln(1-x)$ et la décomposition de $\frac{1}{X^2-1}$.

$$\text{En déduire } S(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - x \right) \ln(1-x) + \frac{1}{2} + \frac{x}{4}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Le rayon est $R = +\infty$. Considérer $T(x) = xS(x^2)$ et calculer $T'(x)$.

$$\text{En déduire } S(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ch} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x} \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}.$$

Pour obtenir $S(x)$ sur \mathbb{R}^{-*} , poser $U(x) = xS(-x^2)$ et calculer $U'(x)$.

$$\text{On trouve } S(x) = \frac{1}{2} \cos \sqrt{-x} - \frac{1}{2\sqrt{-x}} \sin \sqrt{-x} \text{ sur } \mathbb{R}^{-*}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On a $R = +\infty$. Poser $T(x) = x^2S(x)$ et calculer $T'(x)$.

Chercher alors $T(x)$ sous la forme $T(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x - d$.

$$\text{En déduire } S(x) = \left(x + 2 - \frac{5}{x} + \frac{5}{x^2} \right) e^x - \frac{5}{x^2}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

Le rayon vaut 1. Poser $T(x) = xS(x)$. Trouver $T'(x)$ puis $T(x)$.

$$\text{On trouve finalement } S(x) = \frac{1}{4x} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2x} \arctan x.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [Retour à l'énoncé]

On a $R = 1$. Poser $T(x) = x^2S(x^3)$. Décomposer $T'(x)$ en éléments simples.

$$\text{On trouve } S(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \left(-\frac{1}{2} \ln(1 - \sqrt[3]{x}) + \frac{1}{6} \ln(1-x) - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \arctan \left(\frac{2\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{3}} \right) + \frac{\pi}{6\sqrt[3]{3}} \right).$$