

CH.17 : MECANIQUE DU SOLIDE

Plan (Cliquez sur le titre pour accéder au paragraphe)

- I. CINEMATIQUE DU SOLIDE..... 1
 - I.1. DISTRIBUTION DES VITESSES DANS UN SOLIDE..... 1
 - I.2. MOMENT CINETIQUE D’UN SOLIDE AYANT UN POINT DE VITESSE NULLE 2
 - I.3. MOMENT D’INERTIE PAR RAPPORT A UN AXE 2
 - I.3.1. Définition 2
 - I.3.2. Théorème de Huygens 2
 - I.3.3. Trois moments d’inertie « classiques »..... 3
 - I.4. ENERGIE CINETIQUE D’UN SOLIDE AVEC UN POINT DE VITESSE NULLE 3
 - I.5. MOMENT CINETIQUE SCALAIRE..... 3
- II. LOIS GENERALES DE LA DYNAMIQUE DU SOLIDE 4
 - II.1. THEOREME DE LA RESULTANTE CINETIQUE..... 4
 - II.2. THEOREMES DU MOMENT CINETIQUE..... 4
 - II.2.1. Théorème du moment cinétique vectoriel..... 4
 - II.2.2. Théorème du moment cinétique scalaire 4
 - II.3. LOIS DE CONSERVATION POUR UN SOLIDE ISOLE 4
 - II.4. THEOREME DE L’ENERGIE CINETIQUE 5
- III. ACTIONS DE CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES 5
 - III.1. GENERALITES 5
 - III.2. FROTTEMENT DE GLISSEMENT 6
 - III.3. PUISSANCE DES ACTIONS DE CONTACT..... 7
 - III.3.1. Cas général..... 7
 - III.3.2. Cas d’une liaison glissière 7
 - III.3.3. Cas d’une liaison pivot..... 7
- IV. CONSEILS POUR LA RESOLUTION D’UN PROBLEME 8

I. CINEMATIQUE DU SOLIDE

I.1. DISTRIBUTION DES VITESSES DANS UN SOLIDE

• Soient (R) un référentiel quelconque, M_1 et M_2 deux points d’un solide (S) ; on montre que :

$$\vec{v}_{M_2 \in S/R} = \vec{v}_{M_1 \in S/R} + \overline{M_2 M_1} \wedge \vec{\omega}_{S/R}$$

où : $\vec{\omega}_{S/R}(t)$ est le « vecteur vitesse instantanée de rotation » de (S) par rapport à (R).

• **Exemples** : ♦ *translation* : $\vec{\omega}_{S/R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{M_2/R} = \vec{v}_{M_1/R}$

♦ *rotation autour d’un axe FIXE passant par M_1* : $\vec{v}_{M_1/R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{M_2/R} = \vec{\omega}_{S/R} \wedge \overline{M_1 M_2}$

1.2. MOMENT CINETIQUE D'UN SOLIDE AYANT UN POINT DE VITESSE NULLE

• Soit O le point fixe ; M est un point quelconque du solide et $\vec{\omega}_{S/R}$ le vecteur rotation instantanée ; en généralisant la définition du chapitre 14 à une distribution **continue** de masse, on peut écrire :

$$\vec{\sigma}_{o/R} = \iiint_{M \in S} \overline{OM} \wedge \vec{v}_{M/R} dm = \iiint_{M \in S} \overline{OM} \wedge (\vec{\omega}_{S/R} \wedge \overline{OM}) dm$$

• Cette relation définit une **application LINEAIRE** de l'espace vectoriel des **rotations** dans l'espace vectoriel des **moments cinétiques**.

Cette application est susceptible d'une représentation **matricielle** :

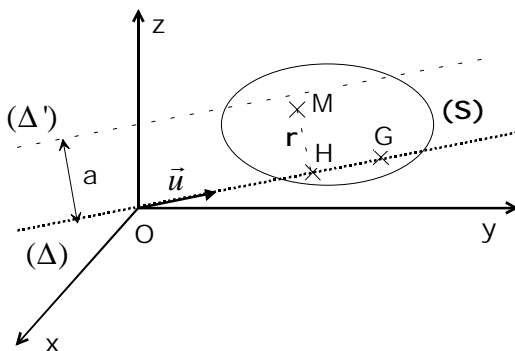
$$(\sigma_{o/R}) = [J_o](\omega_{o/R}) \quad \text{où : } [J_o] \text{ est la « matrice d'inertie », symétrique, du solide (S) en O.}$$

Rq1 : cette relation montre, qu'en général, le moment cinétique **n'est pas colinéaire** au vecteur rotation instantanée.

Rq2 : la notion de matrice d'inertie (sa diagonalisation, l'existence d'axes principaux d'inertie...) n'est pas au programme : elle permet cependant de justifier les relations obtenues dans les paragraphes suivants.

1.3. MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT A UN AXE

1.3.1. Définition



On note J_{Δ} le moment d'inertie du solide (S) par rapport à un axe (Δ) passant par O. \vec{u} est un vecteur **unitaire** de cet axe; on pose:

$$J_{\Delta} = \iiint_{M \in S} HM^2 \times dm = \iiint_{M \in S} r^2 \times dm \quad (J_{\Delta} \text{ est en } kg.m^2)$$

Rq : un moment d'inertie prend en compte la masse d'un solide (par l'intermédiaire de dm), mais également la manière dont cette masse se répartit (par l'intermédiaire de r^2).

1.3.2. Théorème de Huygens

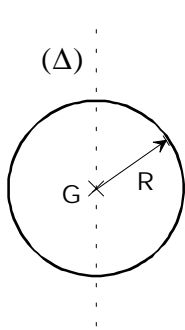
Si l'on note J_G le moment d'inertie de (S) par rapport à un axe (Δ) , passant par le centre d'inertie G du solide, alors on peut en déduire le moment d'inertie de (S) par rapport à un axe (Δ') , **parallèle** à (Δ) et distant de ce dernier de a, en écrivant :

$$J_{\Delta'} = J_G + ma^2 \quad (\text{où m est la masse totale du solide})$$

Rq : le théorème de Huygens n'est pas explicitement au programme (mais pas interdit) ; dans la plupart des cas, nous verrons que l'on peut s'en dispenser et on lui préférera les 2 théorèmes de König.

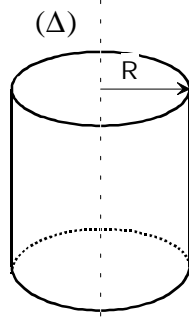
1.3.3. Trois moments d'inertie « classiques »

- **Remarque préliminaire** : les calculs de moment d'inertie ne sont pas au programme et doivent être fournis par l'énoncé ; dans le cas contraire, on se contentera de noter J_{Δ} le moment d'inertie du système par rapport à l'axe considéré.
- Les moments d'inertie suivants sont donnés à titre indicatif ; on notera M la masse des solides :



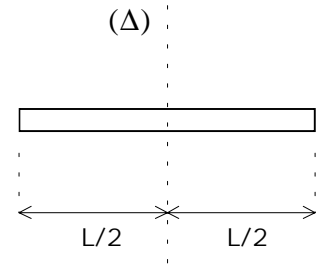
sphère pleine homogène

$$J_{\Delta} = \frac{2}{5} MR^2$$



cylindre plein homogène

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} MR^2$$



barre "mince" homogène

$$J_{\Delta} = \frac{ML^2}{12}$$

1.4. ENERGIE CINETIQUE D'UN SOLIDE AVEC UN POINT DE VITESSE NULLE

- $E_C = \frac{1}{2} (\iiint_{M \in S} v^2(M) dm) = \frac{1}{2} \iiint_{M \in S} \vec{v}(M) \cdot \vec{v}(M) dm = \frac{1}{2} \iiint_{M \in S} \vec{v}(M) \cdot (\vec{\omega}_{S/R} \wedge \vec{OM}) dm \Rightarrow$
 $E_C = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{S/R} \cdot \iiint_{M \in S} \vec{OM} \wedge \vec{v}(M) dm$ ($\vec{\omega}_{S/R}$ peut dépendre du temps, l'intégration se faisant selon les variables d'espace) ; on reconnaît l'expression du moment cinétique, d'où :

$$E_C = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{S/R} \cdot \vec{\sigma}_{o/R} = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{S/R} \cdot [(J_o) \vec{\omega}_{S/R}]$$

- En notant \vec{u} un vecteur unitaire de l'axe instantané de rotation (Δ), on a : $\vec{\omega}_{S/R} = \omega_{S/R} \vec{u}$; le calcul montre que l'on a alors :

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_{S/R}^2$$

1.5. MOMENT CINETIQUE SCALAIRE

- On s'intéresse à la projection du moment cinétique vectoriel $\vec{\sigma}_{o/R}$ sur l'axe instantané de rotation ; avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$$\sigma_{\Delta/R} = \vec{u} \cdot \vec{\sigma}_{o/R} = \text{« moment cinétique scalaire du solide (S) par rapport à l'axe } (\Delta) \text{ »}$$

(dans le référentiel (R))

- On montre que :

$$\sigma_{\Delta/R}(t) = J_{\Delta} \omega_{S/R}(t)$$