CH.17 : MECANIQUE DU SOLIDE

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

I. CINEMATIQUE DU SOLIDE 1
I.1. DISTRIBUTION DES VITESSES DANS UN SOLIDE 1
I.2. MOMENT CINETIQUE D'UN SOLIDE AYANT UN POINT DE VITESSE NULLE 2
I.3. MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT A UN AXE 2
I.3.1. Définition 2
I.3.2. Théorème de Huygens 2
I.3.3. Trois moments d'inertie « classiques » 3
I.4. ENERGIE CINETIQUE D'UN SOLIDE AVEC UN POINT DE VITESSE NULLE 3
I.5. MOMENT CINETIQUE SCALAIRE 3
II. LOIS GENERALES DE LA DYNAMIQUE DU SOLIDE 4
II.1. THEOREME DE LA RESULTANTE CINETIQUE 4
II.2. THEOREMES DU MOMENT CINETIQUE 4
II.2.1. Théorème du moment cinétique vectoriel 4
II.2.2. Théorème du moment cinétique scalaire 4
II.3. LOIS DE CONSERVATION POUR UN SOLIDE ISOLE 4
II.4. THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE 5
III. ACTIONS DE CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES 5
III.1. GENERALITES 5
III.2. FROTTEMENT DE GLISSEMENT 6
III.3. PUISSANCE DES ACTIONS DE CONTACT 7
III.3.1. Cas général 7
III.3.2. Cas d'une liaison glissière 7
III.3.3. Cas d'une liaison pivot 7
IV. CONSEILS POUR LA RESOLUTION D'UN PROBLEME 8

****

I. CINEMATIQUE DU SOLIDE

I.1. DISTRIBUTION DES VITESSES DANS UN SOLIDE

• Soient (R) un référentiel quelconque, M_1 et M_2 deux points d'un solide (S) ; on montre que :

$$\boxed{\vec{v}_{M_2\in S/R} = \vec{v}_{M_1\in S/R} + \overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{\omega}_{S/R}}$$

où : $\vec{\omega}_{S/R}(t)$ est le « **vecteur vitesse instantanée de rotation** » de (S) par rapport à (R).

• **Exemples** : ♦ *translation* : $\vec{\omega}_{S/R} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{M_2/R} = \vec{v}_{M_1/R}}$

♦ *rotation autour d'un axe FIXE passant par* M_1 : $\vec{v}_{M_1/R} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{M_2/R} = \vec{\omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{M_1M_2}}$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

I.2. MOMENT CINETIQUE D'UN SOLIDE AYANT UN POINT DE VITESSE NULLE

• Soit O le point fixe ; M est un point quelconque du solide et $\vec{\omega}_{S/R}$ le vecteur rotation instantanée ;en généralisant la définition du chapitre 14 à une distribution **continue** de masse, on peut écrire :

$$\vec{\sigma}_{o/R} = \iiint_{M\in S} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_{M/R} dm = \iiint_{M\in S} \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{\omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{OM}\right) dm$$

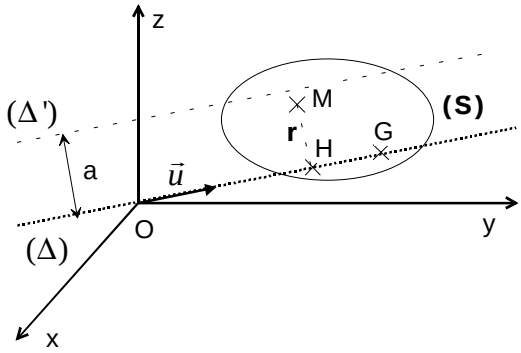
• Cette relation définit une **application LINEAIRE** de l'espace vectoriel des **rotations** dans l'espace vectoriel des **moments cinétiques**.
Cette application est susceptible d'une représentation **matricielle** :

$\left(\sigma_{o/R}\right) = \left[J_o\right]\left(\omega_{o/R}\right)$ où : $\left[J_o\right]$ est la « **matrice d'inertie** », symétrique, du solide (S) en O.

Rq1 : cette relation montre, qu'en général, le moment cinétique **n'est pas colinéaire** au vecteur rotation instantanée.
Rq2 : la notion de matrice d'inertie (sa diagonalisation, l'existence d'axes principaux d'inertie…) n'est pas au programme : elle permet cependant de justifier les relations obtenues dans les paragraphes suivants.

I.3. MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT A UN AXE

I.3.1. Définition



On note J_Δ le moment d'inertie du solide (S) par rapport à un axe (Δ) passant par O.
$\vec{u}$ est un vecteur **unitaire** de cet axe; on pose:

$$J_\Delta = \iiint_{M\in S} HM^2 \times dm = \iiint_{M\in S} r^2 \times dm \qquad (J_\Delta \text{ est en } kg.m^2)$$

Rq : un moment d'inertie prend en compte la masse d'un solide (par l'intermédiaire de dm), mais également la manière dont cette masse se répartit (par l'intermédiaire de r^2).

I.3.2. Théorème de Huygens

Si l'on note J_G le moment d'inertie de (S) par rapport à un axe (Δ), passant par le centre d'inertie G du solide, alors on peut en déduire le moment d'inertie de (S) par rapport à un axe (Δ'), **parallèle** à (Δ) et distant de ce dernier de a, en écrivant :

$$J_{\Delta'} = J_G + ma^2$$ (où m est la masse totale du solide)

Rq : le théorème de Huygens n'est pas explicitement au programme (mais pas interdit) ; dans la plupart des cas, nous verrons que l'on peut s'en dispenser et on lui préférera les 2 théorèmes de König.

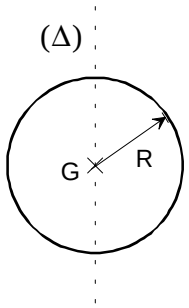
 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

I.3.3. *Trois moments d'inertie « classiques »*

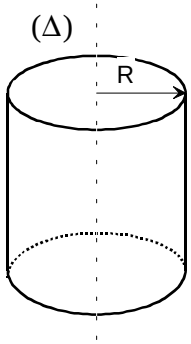
• **Remarque préliminaire :** les calculs de moment d'inertie ne sont pas au programme et doivent être fournis par l'énoncé ; dans le cas contraire, on se contentera de noter J_Δ le moment d'inertie du système par rapport à l'axe considéré.

• Les moments d'inertie suivants sont donnés à titre indicatif ; on notera M la masse des solides :



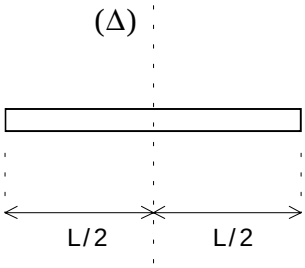
sphère pleine homogène

$$J_\Delta = \frac{2}{5}MR^2$$



cylindre plein homogène

$$J_\Delta = \frac{1}{2}MR^2$$



barre "mince" homogène

$$J_\Delta = \frac{ML^2}{12}$$

I.4. ENERGIE CINETIQUE D'UN SOLIDE AVEC UN POINT DE VITESSE NULLE

• $E_C = \frac{1}{2}(\iiint_{M\in S} v^2(M)dm = \frac{1}{2}\iiint_{M\in S} \vec{v}(M)\cdot\vec{v}(M)dm = \frac{1}{2}\iiint_{M\in S} \vec{v}(M)\cdot(\vec{\omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{OM})dm \Rightarrow$

$E_C = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{S/R}\cdot\iiint_{M\in S}\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}(M)dm$ ($\vec{\omega}_{S/R}$ peut dépendre du temps, l'intégration se faisant selon les variables d'espace) ; on reconnaît l'expression du moment cinétique, d'où :

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{S/R}\cdot\vec{\sigma}_{o/R} = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{S/R}\cdot[(J_o)\vec{\omega}_{S/R}]$$

• En notant $\vec{u}$ un vecteur unitaire de **l'axe instantané de rotation** (Δ), on a : $\vec{\omega}_{S/R} = \omega_{S/R}\vec{u}$; le calcul montre que l'on a alors :

$$E_C = \frac{1}{2}J_\Delta\omega_{S/R}^2$$

I.5. MOMENT CINETIQUE SCALAIRE

• On s'intéresse à la projection du moment cinétique vectoriel $\vec{\sigma}_{o/R}$ sur l'axe instantané de rotation ; avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$\sigma_{\Delta/R} = \vec{u}\cdot\vec{\sigma}_{o/R}$ = « moment cinétique **scalaire** du solide (S) par rapport à l'axe (Δ) » (dans le référentiel (R))

• On montre que : $\sigma_{\Delta/R}(t) = J_\Delta\times\omega_{S/R}(t)$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.