

**CH.17 : MECANIQUE DU SOLIDE**

**Plan** (Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)

\*\*\*\*\*

- I. CINEMATIQUE DU SOLIDE..... 1
  - I.1. DISTRIBUTION DES VITESSES DANS UN SOLIDE..... 1
  - I.2. MOMENT CINETIQUE D’UN SOLIDE AYANT UN POINT DE VITESSE NULLE ..... 2
  - I.3. MOMENT D’INERTIE PAR RAPPORT A UN AXE ..... 2
    - I.3.1. Définition ..... 2
    - I.3.2. Théorème de Huygens ..... 2
    - I.3.3. Trois moments d’inertie « classiques »..... 3
  - I.4. ENERGIE CINETIQUE D’UN SOLIDE AVEC UN POINT DE VITESSE NULLE ..... 3
  - I.5. MOMENT CINETIQUE SCALAIRE..... 3
- II. LOIS GENERALES DE LA DYNAMIQUE DU SOLIDE ..... 4
  - II.1. THEOREME DE LA RESULTANTE CINETIQUE..... 4
  - II.2. THEOREMES DU MOMENT CINETIQUE..... 4
    - II.2.1. Théorème du moment cinétique vectoriel..... 4
    - II.2.2. Théorème du moment cinétique scalaire ..... 4
  - II.3. LOIS DE CONSERVATION POUR UN SOLIDE ISOLE ..... 4
  - II.4. THEOREME DE L’ENERGIE CINETIQUE ..... 5
- III. ACTIONS DE CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES ..... 5
  - III.1. GENERALITES ..... 5
  - III.2. FROTTEMENT DE GLISSEMENT ..... 6
  - III.3. PUISSANCE DES ACTIONS DE CONTACT..... 7
    - III.3.1. Cas général..... 7
    - III.3.2. Cas d’une liaison glissière ..... 7
    - III.3.3. Cas d’une liaison pivot..... 7
- IV. CONSEILS POUR LA RESOLUTION D’UN PROBLEME ..... 8

\*\*\*\*\*

**I. CINEMATIQUE DU SOLIDE**

**I.1. DISTRIBUTION DES VITESSES DANS UN SOLIDE**

• Soient (R) un référentiel quelconque,  $M_1$  et  $M_2$  deux points d’un solide (S) ; on montre que :

$$\vec{v}_{M_2 \in S/R} = \vec{v}_{M_1 \in S/R} + \overline{M_2 M_1} \wedge \vec{\omega}_{S/R}$$

où :  $\vec{\omega}_{S/R}(t)$  est le « vecteur vitesse instantanée de rotation » de (S) par rapport à (R).

• **Exemples** : ♦ *translation* :  $\vec{\omega}_{S/R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{M_2/R} = \vec{v}_{M_1/R}$

♦ *rotation autour d’un axe FIXE passant par  $M_1$*  :  $\vec{v}_{M_1/R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{M_2/R} = \vec{\omega}_{S/R} \wedge \overline{M_1 M_2}$

### 1.2. MOMENT CINÉTIQUE D'UN SOLIDE AYANT UN POINT DE VITESSE NULLE

- Soit O le point fixe ; M est un point quelconque du solide et  $\vec{\omega}_{S/R}$  le vecteur rotation instantanée ; en généralisant la définition du chapitre 14 à une distribution **continue** de masse, on peut écrire :

$$\vec{\sigma}_{o/R} = \iiint_{M \in S} \overline{OM} \wedge \vec{v}_{M/R} dm = \iiint_{M \in S} \overline{OM} \wedge (\vec{\omega}_{S/R} \wedge \overline{OM}) dm$$

- Cette relation définit une **application LINEAIRE** de l'espace vectoriel des **rotations** dans l'espace vectoriel des **moments cinétiques**. Cette application est susceptible d'une représentation **matricielle** :

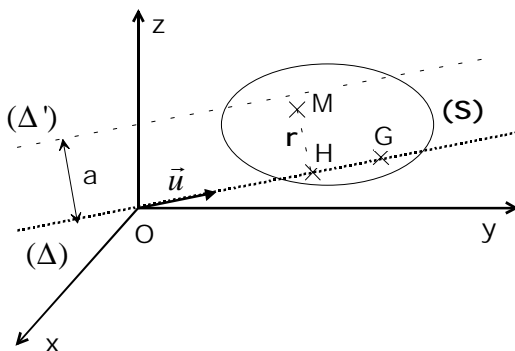
$$(\sigma_{o/R}) = [J_o](\omega_{o/R}) \quad \text{où : } [J_o] \text{ est la « matrice d'inertie », symétrique, du solide (S) en O.}$$

**Rq1** : cette relation montre, qu'en général, le moment cinétique **n'est pas colinéaire** au vecteur rotation instantanée.

**Rq2** : la notion de matrice d'inertie (sa diagonalisation, l'existence d'axes principaux d'inertie...) n'est pas au programme : elle permet cependant de justifier les relations obtenues dans les paragraphes suivants.

### 1.3. MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT A UN AXE

#### 1.3.1. Définition



On note  $J_{\Delta}$  le moment d'inertie du solide (S) par rapport à un axe  $(\Delta)$  passant par O.  $\vec{u}$  est un vecteur **unitaire** de cet axe; on pose:

$$J_{\Delta} = \iiint_{M \in S} HM^2 \times dm = \iiint_{M \in S} r^2 \times dm \quad (J_{\Delta} \text{ est en } kg.m^2)$$

**Rq** : un moment d'inertie prend en compte la masse d'un solide (par l'intermédiaire de  $dm$ ), mais également la manière dont cette masse se répartit (par l'intermédiaire de  $r^2$ ).

#### 1.3.2. Théorème de Huygens

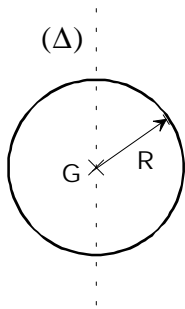
Si l'on note  $J_G$  le moment d'inertie de (S) par rapport à un axe  $(\Delta)$ , passant par le centre d'inertie G du solide, alors on peut en déduire le moment d'inertie de (S) par rapport à un axe  $(\Delta')$ , **parallèle** à  $(\Delta)$  et distant de ce dernier de  $a$ , en écrivant :

$$J_{\Delta'} = J_G + ma^2 \quad (\text{où } m \text{ est la masse totale du solide})$$

**Rq** : le théorème de Huygens n'est pas explicitement au programme (mais pas interdit) ; dans la plupart des cas, nous verrons que l'on peut s'en dispenser et on lui préférera les 2 théorèmes de König.

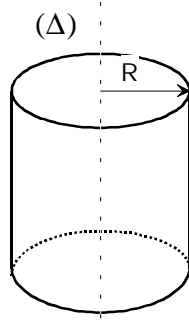
**1.3.3. Trois moments d'inertie « classiques »**

- **Remarque préliminaire** : les calculs de moment d'inertie ne sont pas au programme et doivent être fournis par l'énoncé ; dans le cas contraire, on se contentera de noter  $J_{\Delta}$  le moment d'inertie du système par rapport à l'axe considéré.
- Les moments d'inertie suivants sont donnés à titre indicatif ; on notera M la masse des solides :



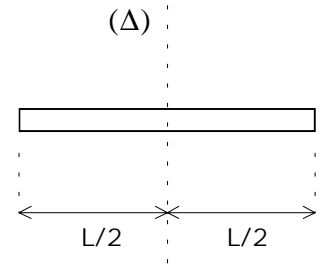
sphère pleine homogène

$$J_{\Delta} = \frac{2}{5} MR^2$$



cylindre plein homogène

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} MR^2$$



barre "mince" homogène

$$J_{\Delta} = \frac{ML^2}{12}$$

**1.4. ENERGIE CINETIQUE D'UN SOLIDE AVEC UN POINT DE VITESSE NULLE**

- $E_C = \frac{1}{2} \left( \iiint_{M \in S} v^2(M) dm \right) = \frac{1}{2} \iiint_{M \in S} \vec{v}(M) \cdot \vec{v}(M) dm = \frac{1}{2} \iiint_{M \in S} \vec{v}(M) \cdot (\vec{\omega}_{S/R} \wedge \vec{OM}) dm \Rightarrow$   
 $E_C = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{S/R} \cdot \iiint_{M \in S} \vec{OM} \wedge \vec{v}(M) dm$  ( $\vec{\omega}_{S/R}$  peut dépendre du temps, l'intégration se faisant selon les variables d'espace) ; on reconnaît l'expression du moment cinétique, d'où :

$$E_C = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{S/R} \cdot \vec{\sigma}_{o/R} = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{S/R} \cdot [(J_o) \vec{\omega}_{S/R}]$$

- En notant  $\vec{u}$  un vecteur unitaire de l'axe instantané de rotation ( $\Delta$ ), on a :  $\vec{\omega}_{S/R} = \omega_{S/R} \vec{u}$  ; le calcul montre que l'on a alors :

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_{S/R}^2$$

**1.5. MOMENT CINETIQUE SCALAIRE**

- On s'intéresse à la projection du moment cinétique vectoriel  $\vec{\sigma}_{o/R}$  sur l'axe instantané de rotation ; avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$$\sigma_{\Delta/R} = \vec{u} \cdot \vec{\sigma}_{o/R} = \text{« moment cinétique scalaire du solide (S) par rapport à l'axe } (\Delta) \text{ »}$$

(dans le référentiel (R))

- On montre que :

$$\sigma_{\Delta/R}(t) = J_{\Delta} \omega_{S/R}(t)$$