

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, paire, 2π -périodique, définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = x^2(\pi - x)^2$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , et qu'elle est de classe \mathcal{C}^3 par morceaux.
2. Développer f en série de Fourier. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8}$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soit t un réel non entier. Soit f , 2π -périodique, définie par : $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \cos(tx)$.

1. Former le développement en série de Fourier de f .
2. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{\tan \pi t} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2}$.
3. Par dérivation terme à terme, en déduire : $\forall t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t - n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi t)}$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soit t un nombre réel. On suppose que t n'est pas un entier relatif.

On définit une application f , 2π -périodique sur \mathbb{R} , par : $\forall x \in]0, 2\pi[$, $f(x) = e^{itx}$.

1. Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f .
2. En utilisant l'identité de Parseval, montrer que $\forall t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t - p)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi t)}$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{E}_{2\pi}$. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n} c_n(f)$ est absolument convergente.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soit λ un réel non nul de $] -1, 1[$. Pour tout réel x , on pose $f(x) = \frac{1}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2}$.

1. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur \mathbb{R} . Ecrire l'égalité qui en résulte, sans chercher à calculer les $a_n(f)$ (qu'on notera simplement a_n).
2. (a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , on a : $\lambda a_{n+1} - (1 + \lambda^2)a_n + \lambda a_{n-1} = 0$.
 (b) En déduire l'existence de deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha \lambda^n + \frac{\beta}{\lambda^n}$.
 (c) Montrer $\beta = 0$. Calculer a_0 et en déduire l'expression de a_n .
3. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in] -1, 1[$, $\frac{1 - \lambda^2}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \cos nx$
4. Retrouver ce résultat en utilisant un développement en série entière.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Justifier l'égalité $f(x) \equiv \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx)$. Montrer que $a_0(f) = \frac{\pi^4}{15}$.

Après quatre intégrations par parties, on trouve $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = -\frac{48}{(2n)^4} = -\frac{3}{n^4}$.

Choisir x , on trouve $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}$. Parseval donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

– On obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} + \frac{2t \sin \pi t}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{t^2 - n^2}$.

– Choisir $x = \pi$. Pour tout $n \geq 1$, définir l'application $t \mapsto \varphi_n(t) = \frac{2t}{t^2 - n^2}$.

Vérifier qu'on peut appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On trouve : $\forall p \in \mathbb{Z}, c_p(f) = \frac{e^{i\pi t} \sin \pi t}{\pi(t-p)}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Justifier l'inégalité $\frac{1}{n} |c_n(f)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |c_n(f)|^2 \right)$ et utiliser un résultat du cours.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Justifier que pour tout x de \mathbb{R} : $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$.

2. (a) Constater que $\lambda \cos(n+1)x - (1+\lambda^2) \cos nx + \lambda \cos(n-1)x = -\frac{\cos nx}{f(x)}$.

(b) Résultat du cours sur les récurrences linéaires d'ordre 2.

(c) Utiliser le fait (connue) que la suite (a_n) est convergente vers 0.

Poser $t = \tan \frac{x}{2}$, puis $t = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} u$. En déduire $a_0 = \frac{2}{1-\lambda^2}$.

3. C'est une conséquence immédiate du développement en série de Fourier de f .

4. Fixer x et décomposer $g(\lambda) = \frac{1-\lambda^2}{1-2\lambda \cos x + \lambda^2}$ en éléments simples.

Utiliser le DSE de $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ pour $|z| < 1$.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. L'application f est π -périodique, de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$. Sur $]0, \pi[$, on a :

$$f(x) = \pi^2 x^2 - 2\pi x^3 + x^4, \quad f'(x) = 2\pi^2 x - 6\pi x^2 + 4x^3, \quad f''(x) = 2\pi^2 - 12\pi x + 12x^2$$

On constate que $\lim_{0^+} f = \lim_{\pi^-} f = 0$, $\lim_{0^+} f' = \lim_{\pi^-} f' = 0$ et $\lim_{0^+} f'' = \lim_{\pi^-} f'' = 2\pi^2$.

Or les applications f, f', f'' sont π -périodiques.

Donc f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et : $\forall k \in \mathbb{Z}, f(k\pi) = 0, f'(k\pi) = 0, f''(k\pi) = 2\pi^2$.

L'application $f^{(3)}$ est définie sur $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ et π -périodique.

Sur $]0, \pi[$, $f^{(3)}(x) = -12\pi + 24x$. Ainsi $\lim_{0^+} f^{(3)} = -12\pi$ et $\lim_{0^-} f^{(3)} = 12\pi$.

L'application f est donc de classe \mathcal{C}^3 par morceaux sur \mathbb{R} .

2. f est continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Le théorème de convergence normale s'applique : la série de Fourier de f est CVN vers f sur \mathbb{R} .

L'application f étant paire, sa série de Fourier est une série de "cosinus".

$$\text{Donc } f(x) \equiv \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx), \text{ avec : } \forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos nt \, dt.$$

$$\text{En particulier, } a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi^2 t^2 - 2\pi t^3 + t^4) \, dt = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^5}{3} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{\pi^5}{5} \right) = \frac{\pi^4}{15}.$$

Pour calculer a_n avec $n \geq 1$ on procède à quatre intégrations par parties successives.

Posons :

$$g^{(4)}(x) = \cos nx, \quad g^{(3)}(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad g''(x) = -\frac{\cos nx}{n^2}, \quad g'(x) = -\frac{\sin nx}{n^3}, \quad g(x) = \frac{\cos nx}{n^4}$$

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(t) \cos nt \, dt &= \int_0^\pi f(t) g^{(4)}(t) \, dt \\ &= \underbrace{[f(t)g^{(3)}(t)]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi f'(t)g^{(3)}(t) \, dt = - \int_0^\pi f'(t)g^{(3)}(t) \, dt \\ &= - \underbrace{[f'(t)g''(t)]_0^\pi}_{=0} + \int_0^\pi f''(t)g''(t) \, dt = \int_0^\pi f''(t)g''(t) \, dt \\ &= \underbrace{[f''(t)g'(t)]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi f^{(3)}(t)g'(t) \, dt = - \int_0^\pi f^{(3)}(t)g'(t) \, dt \\ &= - [f^{(3)}(t)g(t)]_0^\pi + \int_0^\pi f^{(4)}(t)g(t) \, dt \\ &= \frac{-12\pi}{n^4}(1 + (-1)^n) + \frac{24}{n^4} \underbrace{\int_0^\pi \cos nt \, dt}_{=0} \end{aligned}$$