Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, paire, 2π-périodique, définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = x^2(\pi - x)^2$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^3$ par morceaux.
2. Développer f en série de Fourier. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit t un réel non entier. Soit f, 2π-périodique, définie par : $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \cos(tx)$.

1. Former le développement en série de Fourier de f.
2. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $\displaystyle\frac{\pi}{\tan \pi t} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2}$.
3. Par dérivation terme à terme, en déduire : $\forall t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi t)}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit t un nombre réel. On suppose que t n'est pas un entier relatif.

On définit une application f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, par : $\forall x \in]0, 2\pi[$, $f(x) = \mathrm{e}^{itx}$.

1. Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f.
2. En utilisant l'identité de Parseval, montrer que $\forall t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t-p)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi t)}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{E}_{2\pi}$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n} c_n(f)$ est absolument convergente.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit λ un réel non nul de $]-1, 1[$. Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2}$.

1. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. Ecrire l'égalité qui en résulte, sans chercher à calculer les $a_n(f)$ (qu'on notera simplement a_n).
2. (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\lambda a_{n+1} - (1 + \lambda^2) a_n + \lambda a_{n-1} = 0$.
   (b) En déduire l'existence de deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \alpha \lambda^n + \dfrac{\beta}{\lambda^n}$.
   (c) Montrer $\beta = 0$. Calculer a_0 et en déduire l'expression de a_n.
3. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in]-1, 1[$, $\displaystyle\frac{1 - \lambda^2}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \cos nx$
4. Retrouver ce résultat en utilisant un développement en série entière.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Justifier l'égalité $f(x) \equiv \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nx)$. Montrer que $a_0(f) = \frac{\pi^4}{15}$.

Après quatre intégrations par parties, on trouve $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = -\frac{48}{(2n)^4} = -\frac{3}{n^4}$.

Choisir x, on trouve $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}$. Parseval donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

– On obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} + \frac{2t \sin \pi t}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{t^2 - n^2}$.

– Choisir $x = \pi$. Pour tout $n \geq 1$, définir l'application $t \mapsto \varphi_n(t) = \frac{2t}{t^2 - n^2}$.
  Vérifier qu'on peut appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On trouve : $\forall p \in \mathbb{Z}, c_p(f) = \frac{e^{i\pi t} \sin \pi t}{\pi(t-p)}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Justifier l'inégalité $\frac{1}{n}|c_n(f)| \leq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2} + |c_n(f)|^2\Big)$ et utiliser un résultat du cours.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. Justifier que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$.
2. (a) Constater que $\lambda\cos(n+1)x - (1+\lambda^2)\cos nx + \lambda\cos(n-1)x = -\frac{\cos nx}{f(x)}$.
   (b) Résultat du cours sur les récurrences linéaires d'ordre 2.
   (c) Utiliser le fait (connue) que la suite (a_n) est convergente vers 0.
   Poser $t = \tan\frac{x}{2}$, puis $t = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}u$. En déduire $a_0 = \frac{2}{1-\lambda^2}$.
3. C'est une conséquence immédiate du développement en série de Fourier de f.
4. Fixer x et décomposer $g(\lambda) = \frac{1-\lambda^2}{1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2}$ en éléments simples.
   Utiliser le DSE de $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ pour $|z| < 1$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. L'application f est π-périodique, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}-\pi\mathbb{Z}$. Sur $]0,\pi[$, on a :

$$f(x)=\pi^2x^2-2\pi x^3+x^4,\quad f'(x)=2\pi^2x-6\pi x^2+4x^3,\quad f''(x)=2\pi^2-12\pi x+12x^2$$

On constate que $\lim\limits_{0^+} f=\lim\limits_{\pi^-} f=0$, $\lim\limits_{0^+} f'=\lim\limits_{\pi^-} f'=0$ et $\lim\limits_{0^+} f''=\lim\limits_{\pi^-} f''=2\pi^2$.

Or les applications f,f',f'' sont π-périodiques.

Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall k\in\mathbb{Z}, f(k\pi)=0,\ f'(k\pi)=0,\ f''(k\pi)=2\pi^2$.

L'application $f^{(3)}$ est définie sur $\mathbb{R}-\pi\mathbb{Z}$ et π-périodique.

Sur $]0,\pi[$, $f^{(3)}(x)=-12\pi+24x$. Ainsi $\lim\limits_{0^+} f^{(3)}=-12\pi$ et $\lim\limits_{0^-} f^{(3)}=12\pi$.

L'application f est donc de classe $\mathcal{C}^3$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2. f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Le théorème de convergence normale s'applique : la série de Fourier de f est CVN vers f sur $\mathbb{R}$.

L'application f étant paire, sa série de Fourier est une série de "cosinus".

Donc $f(x)\equiv\dfrac{1}{2}a_0(f)+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(f)\cos(nx)$, avec : $\forall n\in\mathbb{N}, a_n(f)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t$.

En particulier, $a_0(f)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi(\pi^2t^2-2\pi t^3+t^4)\,\mathrm{d}t=\dfrac{2}{\pi}\Big(\dfrac{\pi^5}{3}-\dfrac{\pi^5}{2}+\dfrac{\pi^5}{5}\Big)=\dfrac{\pi^4}{15}$.

Pour calculer a_n avec $n\geq 1$ on procède à quatre intégrations par parties successives.

Posons :

$$g^{(4)}(x)=\cos nx,\ g^{(3)}(x)=\frac{\sin nx}{n},\ g''(x)=-\frac{\cos nx}{n^2},\ g'(x)=-\frac{\sin nx}{n^3},\ g(x)=\frac{\cos nx}{n^4}$$

Pour tout entier $n\geq 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t &= \int_0^\pi f(t)g^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \underbrace{\big[f(t)g^{(3)}(t)\big]_0^\pi}_{=0}-\int_0^\pi f'(t)g^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^\pi f'(t)g^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\underbrace{\big[f'(t)g''(t)\big]_0^\pi}_{=0}+\int_0^\pi f''(t)g''(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^\pi f''(t)g''(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \underbrace{\big[f''(t)g'(t)\big]_0^\pi}_{=0}-\int_0^\pi f^{(3)}(t)g'(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^\pi f^{(3)}(t)g'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\big[f^{(3)}(t)g(t)\big]_0^\pi+\int_0^\pi f^{(4)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{-12\pi}{n^4}(1+(-1)^n)+\frac{24}{n^4}\underbrace{\int_0^\pi\cos nt\,\mathrm{d}t}_{=0}\end{aligned}$$