Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Calculer $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_0 & \cos 2\theta_0 & \dots & \cos n\theta_0 \\ 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \dots & \cos n\theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \dots & \cos n\theta_n \end{vmatrix}$

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $\Delta_n(\theta)$ de $A_n = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ avec : $\begin{cases} a_{ii} = 2 \\ a_{i-1,j} = a_{i+1,j} = \cos\theta \\ a_{ij} = 0 \text{ dans les autres cas} \end{cases}$

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = |\det(A+iB)|^2$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soient A, B, C trois matrices carrées d'ordre n.

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 0 & B \\ A & C \end{vmatrix}$ en fonction des déterminants de A et de B.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Justifier l'existence d'un polynôme P_m, de degré m, tel que $\cos m\theta = P_m(\cos\theta)$.

Vérifier que le coefficient dominant de P_m est 2^{m-1}.

Montrer que par soustractions successives de colonnes, le déterminant D_{n+1} se ramène à un déterminant de Van Der Monde. En déduire $D_{n+1} = 2^{\frac{(n-1)n}{2}} \prod_{0\le i<j\le n} (\cos\theta_j - \cos\theta_i)$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Développe $\Delta_n(\theta)$ par rapport à sa première ligne.

En déduire $\Delta_n(\theta) = 2\Delta_{n-1}(\theta) - \cos^2\theta\Delta_{n-2}(\theta)$.

- Si $\sin\theta \neq 0$, on trouve $\Delta_n(\theta) = \dfrac{(1+\sin\theta)^{n+1} - (1-\sin\theta)^{n+1}}{2\sin\theta}$.
- Si $\theta = k\pi$, on trouve $\Delta_n(k\pi) = n+1$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, ajouter C_{n+j} à C_j.

Pour i allant de 1 à n, ajouter ensuite L_{n+i} à L_i.

On trouve $D_{2n} = 1$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Pour k dans $\{1, \ldots, n\}$, effectuer $\mathrm{C}_k \leftarrow \mathrm{C}_k + i\mathrm{C}_{n+k}$.

Pour tout k compris entre 1 et n, effectuer $\mathrm{L}_{n+k} \leftarrow \mathrm{L}_{n+k} - i\mathrm{L}_k$.

En déduire $D_{2n} = \det(A+iB)\det(A-iB)$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$, échanger L_i et L_{n+i}.

On trouve $D_{2n} = (-1)^n \det A \det B$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.