Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D_n(x) = \begin{vmatrix} a_1^2 - x & a_1a_2 & \dots & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 - x & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 - x & \dots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & a_na_{n-1} & a_n^2 - x \end{vmatrix}$

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D_p = \begin{vmatrix} \mathrm{C}_1^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{C}_2^2 & \mathrm{C}_2^1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \mathrm{C}_{p-1}^1 & 1 \\ \mathrm{C}_p^p & \mathrm{C}_p^{p-1} & \dots & \mathrm{C}_p^2 & \mathrm{C}_p^1 \end{vmatrix}$

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} \mathrm{C}_{n+1}^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{C}_{n+2}^2 & \mathrm{C}_{n+2}^1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \mathrm{C}_{n+p-1}^1 & 1 \\ \mathrm{C}_{n+p}^p & \mathrm{C}_{n+p}^{p-1} & \dots & \mathrm{C}_{n+p}^2 & \mathrm{C}_{n+p}^1 \end{vmatrix}$

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (d'ordre $n \geq 3$)

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & n & n \end{vmatrix}$

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Noter $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et considérer la base canonique $(e) = e_1, \dots, e_n$.
Développer $D_n(x) = \det(a_1 u - xe_1, \dots, a_j u - xe_j, \dots, a_n u - xe_n)$ par n-linéarité.
On trouve $D_n(x) = (-x)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - x\right)$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Effectuer $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} - L_i$ de $i = p-1$ à $i = 1$. En déduire $D_p = D_{p-1}$, puis $D_p = 1$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Si $n = 0$, utiliser le résultat de l'exercice précédent.
Sinon effectuer $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} - L_i$ de $i = p-1$ à $i = 1$.
En déduire la relation $D_p^n = D_p^{n-1} + D_{p-1}^n$.
Par récurrence, prouver que $D_p^n = C_{n+p-1}^n$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Développer par rapport à la première colonne. On trouve $D = 1 - (-1)^n$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On retranche la dernière colonne à toutes les autres. On trouve $D = (-1)^{n-1} n!$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.