Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D_n(x) = \begin{vmatrix} a_1^2 - x & a_1a_2 & \dots & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 - x & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 - x & \dots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & a_na_{n-1} & a_n^2 - x \end{vmatrix}$

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D_p = \begin{vmatrix} \mathrm{C}_1^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{C}_2^2 & \mathrm{C}_2^1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \mathrm{C}_{p-1}^1 & 1 \\ \mathrm{C}_p^p & \mathrm{C}_p^{p-1} & \dots & \mathrm{C}_p^2 & \mathrm{C}_p^1 \end{vmatrix}$

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} \mathrm{C}_{n+1}^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{C}_{n+2}^2 & \mathrm{C}_{n+2}^1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \mathrm{C}_{n+p-1}^1 & 1 \\ \mathrm{C}_{n+p}^p & \mathrm{C}_{n+p}^{p-1} & \dots & \mathrm{C}_{n+p}^2 & \mathrm{C}_{n+p}^1 \end{vmatrix}$

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (d'ordre $n \geq 3$)

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & n & n \end{vmatrix}$

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Noter $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et considérer la base canonique $(e) = e_1, \ldots, e_n$.
Développer $D_n(x) = \det(a_1 u - x e_1, \ldots, a_j u - x e_j, \ldots, a_n u - x e_n)$ par n-linéarité.
On trouve $D_n(x) = (-x)^{n-1}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2 - x\Big)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Effectuer $\mathrm{L}_{i+1} \leftarrow \mathrm{L}_{i+1} - \mathrm{L}_i$ de $i = p-1$ à $i = 1$. En déduire $D_p = D_{p-1}$, puis $D_p = 1$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Si $n = 0$, utiliser le résultat de l'exercice précédent.
Sinon effectuer $\mathrm{L}_{i+1} \leftarrow \mathrm{L}_{i+1} - \mathrm{L}_i$ de $i = p-1$ à $i = 1$.
En déduire la relation $D_p^n = D_p^{n-1} + D_{p-1}^n$.
Par récurrence, prouver que $D_p^n = \mathrm{C}_{n+p-1}^{n}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Développer par rapport à la première colonne. On trouve $D = 1 - (-1)^n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On retranche la dernière colonne à toutes les autres. On trouve $D = (-1)^{n-1} n!$.