Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant d'ordre n : $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & x \end{vmatrix}$

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ a & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & x_n \end{vmatrix}$

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ b & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & x_n \end{vmatrix}$

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{vmatrix}$

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & a_n \end{vmatrix}$

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Effectuer $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \cdots + L_n$, puis factoriser $x + (n-1)a$ dans L_1.
Retrancher aL_1 aux autres lignes. On trouve $D_n = (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Noter $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et $u = (1, 1, \ldots, 1)$.

Constater que $D_n = \det_{(e)}((x_1 - a)e_1 + au, (x_2 - a)e_2 + au, \ldots, (x_n - a)e_n + au)$.

Développer par n-linéarité, et trouver $D_n = \prod_{k=1}^{n}(x_k - a) + a\sum_{j=1}^{n}\prod_{k\neq j}(x_k - a)$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Constater qu'on peut écrire $\Delta_n(t) = \det(C_1 + tU, C_2 + tU, \ldots, C_n + tU)$.
Développer par n-linéarité et vérifier que $\Delta_n(t)$ s'écrit sous la forme $\alpha + \beta t$.
Poser $t = -a$ puis $t = -b$. En déduire $\Delta_n(t)$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Effectuer $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ puis factoriser.

Retrancher a_1C_1 à C_2, a_2C_1 à C_2, ..., a_nC_1 à C_{n+1}.

On trouve $D_{n+1}(x) = \left(x + \sum_{k=1}^{n} a_k\right)\prod_{k=1}^{n}(x - a_k)$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Effectuer successivement $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$, de $j = n$ à $j = 2$.

On obtient $D = \prod_{j=1}^{n}(a_j - b_j)$.