

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

$$\text{Calculer le déterminant } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \dots & \dots & n^2 \end{vmatrix}$$

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

$$\text{Calculer } D(m, p) = \begin{vmatrix} C_m^0 & C_m^1 & \dots & C_m^p \\ C_{m+1}^0 & C_{m+1}^1 & \dots & C_{m+1}^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{m+p}^0 & C_{m+p}^1 & \dots & C_{m+p}^p \end{vmatrix} \quad (\text{d'ordre } p+1, \text{ avec } m \geq p)$$

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

$$\text{Calculer le déterminant } D = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n & \dots & b_n & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

$$\text{Calculer le déterminant } D_n = \begin{vmatrix} p+q & p & \dots & p \\ q & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p \\ q & \dots & q & p+q \end{vmatrix} \quad (\text{d'ordre } n)$$

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

$$\text{Calculer le déterminant } D = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Constater que chaque ligne L_i s'écrit : $L_i = n(i-1)(1, 1, \dots, 1) + (1, 2, \dots, n)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Notons L_0, \dots, L_p les lignes et C_0, \dots, C_p les colonnes.

Effectuer les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$, de $i = p$ à $i = 1$.

En déduire que $D_{m,p} = D_{m,p-1}$. Prouver finalement que $D_{m,p} = 1$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Noter $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$ la base canonique, et poser $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Remarquer que $D_n = \det(a_1 e_1 + b, a_2 e_2 + b, \dots, a_n e_n + b)$.

Développer en utilisant la n -linéarité. On trouve $D_n = \prod_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^n b_j \left(\prod_{i \neq j} a_i \right)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

De $j = n$ à $j = 2$ soustraire C_{j-1} à C_j . De $i = n$ à $i = 2$ soustraire L_{i-1} à L_j .

Développer enfin par rapport à la dernière ligne.

On trouve $D_n = q^n + pD_{n-1}$, puis $D_n = \sum_{k=0}^n p^k q^{n-k}$ (récurrence).

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Pour i allant de 2 à $n+1$, effectuer $C_i \leftarrow C_i + C_{i-1}$.

On trouve $D_{n+1} = (-1)^n (n+1) \prod_{k=1}^n a_k$.