Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \dots & \dots & n^2 \end{vmatrix}$

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Calculer $D(m,p) = \begin{vmatrix} \mathrm{C}_m^0 & \mathrm{C}_m^1 & \dots & \mathrm{C}_m^p \\ \mathrm{C}_{m+1}^0 & \mathrm{C}_{m+1}^1 & \dots & \mathrm{C}_{m+1}^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{C}_{m+p}^0 & \mathrm{C}_{m+p}^1 & \dots & \mathrm{C}_{m+p}^p \end{vmatrix}$ (d'ordre $p+1$, avec $m \geq p$)

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & b_n & \dots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} p+q & p & \dots & p \\ q & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p \\ q & \dots & q & p+q \end{vmatrix}$ (d'ordre n)

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Constater que chaque ligne L_i s'écrit : $\mathrm{L}_i = n(i-1)(1,1,\ldots,1) + (1,2,\ldots,n)$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Notons $\mathrm{L}_0,\ldots,\mathrm{L}_p$ les lignes et $\mathrm{C}_0,\ldots,\mathrm{C}_p$ les colonnes.
Effectuer les opérations $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - \mathrm{L}_{i-1}$, de $i=p$ à $i=1$.
En déduire que $D_{m,p} = D_{m,p-1}$. Prouver finalement que $D_{m,p} = 1$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Noter $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ la base canonique, et poser $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.
Remarquer que $D_n = \det(a_1e_1 + b, a_2e_2 + b, \ldots, a_ne_n + b)$.
Développer en utilisant la n-linéarité. On trouve $D_n = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \Big(\prod_{i\neq j} a_i\Big)$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

De $j=n$ à $j=2$ soustraire C_{j-1} à C_j. De $i=n$ à $i=2$ soustraire L_{i-1} à L_j.
Développer enfin par rapport à la dernière ligne.
On trouve $D_n = q^n + pD_{n-1}$, puis $D_n = \sum_{k=0}^{n} p^k q^{n-k}$ (récurrence).

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Pour i allant de 2 à $n+1$, effectuer $\mathrm{C}_i \leftarrow \mathrm{C}_i + \mathrm{C}_{i-1}$.
On trouve $D_{n+1} = (-1)^n(n+1)\prod_{k=1}^{n} a_k$.