Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit a un réel. On note $A = \begin{pmatrix} a^2 & a & 2 & 2a \\ a & a^2 & 2a & 2 \\ 2 & 2a & a^2 & a \\ 2a & 2 & a & a^2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a \\ a^2 \\ a \end{pmatrix}$

1. Calculer $\det A$ sous forme factorisée.
2. Déterminer le rang de la matrice A.
3. Résoudre le système $AX = B$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & 5y^4 \end{vmatrix}$

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D_6 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$. Généraliser.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Appliquer $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ puis factoriser.
Appliquer ensuite $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$, puis $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$.
Développer par rapport à L_1, tout en factorisant.
En déduire finalement : $\det A = (a+1)^2(a+2)^2(a-1)^2(a-2)^2$.
Vérifier que si $a \in \{-2,-1,1,2\}$, alors $\mathrm{rg}\,(A) = 2$.
Si $a \notin \{-2,-1,1,2\}$, $X = (0,0,1,0)$ est l'unique solution de $AX = B$.
Sinon, l'ensemble des solutions est un plan affine.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Noter $A_1, A_2, \ldots, A_5$ les vecteurs-colonnes, limités aux trois premières lignes.
Chercher A_5 en fonction de A_1, A_2, A_3, A_4, puis A_4 en fonction de A_1, A_2, A_3.
En déduire deux opérations annulant les trois premiers coefficients des colonnes C_3 et C_4.
Développer le déterminant par blocs ainsi obtenu.
On trouve finalement $D = 2x^3y(y-x)^6$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Ajouter toutes les lignes à la première et factoriser.
Retrancher de chaque colonne la précédente.
Après quelques autres opérations, trouver $\Delta = 1875$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Retrancher C_4 à C_1, puis C_3 à C_4, puis C_2 à C_3 et enfin C_1 à C_2.
Dans le résultat, effectuer $L_5 \leftarrow L_5 - L_1 - L_2$ puis développer par rapport à L_5.
On trouve finalement $D = 100$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Développer D_6 par rapport à L_1, puis les deux déterminants obtenus par rapport à L_5.
On trouve $D_6 = (a^2-b^2)D_4 = (a^2-b^2)^2 D_2 = (a^2-b^2)^3$.
Plus généralement $D_{2n} = (a^2-b^2)^n$ et $D_{2n+1} = (a+b)(a^2-b^2)^n$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.