Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit a un réel. On note $A = \begin{pmatrix} a^2 & a & 2 & 2a \\ a & a^2 & 2a & 2 \\ 2 & 2a & a^2 & a \\ 2a & 2 & a & a^2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a \\ a^2 \\ a \end{pmatrix}$

1. Calculer $\det A$ sous forme factorisée.
2. Déterminer le rang de la matrice A.
3. Résoudre le système $AX = B$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & 5y^4 \end{vmatrix}$

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D_6 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$. Généraliser.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Appliquer $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ puis factoriser.
Appliquer ensuite $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$, puis $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$.
Développer par rapport à L_1, tout en factorisant.
En déduire finalement : $\det A = (a+1)^2(a+2)^2(a-1)^2(a-2)^2$.
Vérifier que si $a \in \{-2, -1, 1, 2\}$, alors $\operatorname{rg}(A) = 2$.
Si $a \notin \{-2, -1, 1, 2\}$, $X = (0, 0, 1, 0)$ est l'unique solution de $AX = B$.
Sinon, l'ensemble des solutions est un plan affine.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Noter $A_1, A_2, \ldots, A_5$ les vecteurs-colonnes, limités aux trois premières lignes.
Chercher A_5 en fonction de A_1, A_2, A_3, A_4, puis A_4 en fonction de A_1, A_2, A_3.
En déduire deux opérations annulant les trois premiers coefficients des colonnes C_3 et C_4.
Développer le déterminant par blocs ainsi obtenu.
On trouve finalement $D = 2x^3y(y-x)^6$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Ajouter toutes les lignes à la première et factoriser.
Retrancher de chaque colonne la précédente.
Après quelques autres opérations, trouver $\Delta = 1875$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Retrancher C_4 à C_1, puis C_3 à C_4, puis C_2 à C_3 et enfin C_1 à C_2.
Dans le résultat, effectuer $L_5 \leftarrow L_5 - L_1 - L_2$ puis développer par rapport à L_5.
On trouve finalement $D = 100$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Développer D_6 par rapport à L_1, puis les deux déterminants obtenus par rapport à L_5.
On trouve $D_6 = (a^2 - b^2)D_4 = (a^2 - b^2)^2 D_2 = (a^2 - b^2)^3$.
Plus généralement $D_{2n} = (a^2 - b^2)^n$ et $D_{2n+1} = (a + b)(a^2 - b^2)^n$.