Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Résoudre le système (S) $\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$, où m est un paramètre réel ou complexe.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Résoudre le système (S) $\begin{cases} x+y+(1-m)z=m+2 \\ (1+m)x-y+2z=0 \\ 2x-my+3z=m+2 \end{cases}$ (m un paramètre réel ou complexe.)

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Résoudre le système (S) $\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$ (a,b paramètres réels ou complexes)

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Résoudre le système (S) $\begin{cases} x+ay+a^2z+a^3t=a \\ ax+a^2y+a^3z+t=a^2 \\ a^2x+a^3y+z+at=a^3 \\ a^3x+y+az+a^2t=a^4 \end{cases}$ (a un paramètre réel ou complexe.)

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Résoudre (S) $\begin{cases} ax+iy+z+2it=1 \\ ix-ay+2iz-t=i \\ x-2iy-az+it=1 \\ 2ix+y-iz-at=-i \end{cases}$ (où a est un paramètre complexe.)

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

- Si $m = -1$, le système n'a pas de solution.
- Si $m = 1$, la solution générale est $(x, y, z) = (1, 0, 0) + y(-1, 1, 0)$, avec $y \in \mathbb{K}$.
- Si $m \notin \{-1, 1\}$, la solution unique est $x = \frac{2m}{m+1}, y = 0, z = \frac{m-1}{m+1}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

- Si $m = 2$, le système n'a pas de solution.
- Si $m = 0$, la solution générale est $(x, y, z) = (4, 0, -2) + y(-3, 1, 2)$, avec $y \in \mathbb{K}$.
- Si $m = -2$, la solution générale est $(x, y, z) = x(1, -1, 0)$, avec $x \in \mathbb{K}$.
- Si $m \notin \{-2, 0, 2\}$, la solution unique est $x = \frac{1}{m-2}, y = \frac{3+m}{2-m}, z = \frac{2+m}{2-m}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

- Si $a = -2$ et $b \neq -2$, le système (S) n'a pas de solution.
- Si $(a, b) = (-2, -2)$, la solution générale est $(x, y, z) = (-1, 0, -1) + y(-2, 1, -2)$, $(y \in \mathbb{K})$.
- Si $a = 1$ et $b \neq 1$, le système (S) n'a pas de solution.
- Si $a = 1$ et $b = 1$, le système (S) équivaut à $x + y + z = 1$.
- Si $a \notin \{-2, 1\}$, et $b = 0$, il n'y a pas de solution.
- Si $a \notin \{-2, 1\}, b \neq 0$: solution unique $x = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}, y = \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}, z = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

- Si $a \notin \{1, i, -1, -i\}$, alors $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = z = t = 0 \end{cases}$
- Sinon, $(S) \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (a, 0, 0, 0) + y(-a, 1, 0, 0) + z(-a^2, 0, 1, 0) + t(-a^3, 0, 0, 1)$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Soit M la matrice du système. Remarquer que ${}^{T}MM = \lambda I_4$, avec $\lambda = a^2 - 4$.

- Si $a \notin \{-2, 2\}$ la solution unique est $\frac{1}{a-2}(1, -i, -1, i)$.
- Si $a = 2$, le système (S) n'a pas de solution.
- Si $a = -2$, la solution générale est $(x, y, z, t) = (-1, i, 0, 0) + \frac{z}{3}(4, -5i, 3, 0) + \frac{t}{3}(5i, 4, 0, 3)$.