Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Déterminer le rang de la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$, où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Préciser si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$ est inversible, et calculer dans ce cas son inverse.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes linéaires définies sur $\mathbb{K}^3$ par, pour tout $u = (x, y, z)$:
$\varphi_1(u) = x + 2y + 3z$, $\varphi_2(u) = 2x + 5y + 4z$, $\varphi_3(u) = x + 3y + 2z$.

1. Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbb{K}^3)^*$.
2. Trouver la base duale (u_1, u_2, u_3).

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Sur $E = \mathbb{R}_3[X]$ on définit les applications $f_j : P \to \displaystyle\int_0^1 t^j P(t)\,dt$.

1. Montrer que la famille $(\varepsilon^*) = f_0, f_1, f_2, f_3$ est une base de E^*.
2. Déterminer de quelle base (ε) de E c'est la base duale.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^4$, de matrice A dans la base canonique.

1. Donner une base du noyau de f. Quel est le rang de f ?
2. Donner une équation cartésienne de l'image de f.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Traiter les cas particuliers $(a = b = 0)$ et $(a = 0 \neq b)$.
Si $a \neq 0$: montrer que $\operatorname{rang} A = 4$ si $b^4 \neq a^4$ et $\operatorname{rang} A = 3$ sinon.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

La matrice A est inversible si et seulement si a, b, c sont non nuls.

Son inverse est alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -1/a & -1/b & -1/c \\ -1/a & 1/a & 0 & 0 \\ -1/b & 0 & 1/b & 0 \\ -1/c & 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$ avec $\alpha = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Montrer que la matrice A de la famille $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ dans (e^*) est inversible.
2. Poser $u(x, y, z)$ et $u'(x', y', z') = (f(u), g(u), h(u))$.
   Constater alors que $(\,x \quad y \quad z\,) = (\,x' \quad y' \quad z'\,)A^{-1}$.
   En déduire $u_1 = (-2, 0, 1)$, $u_2 = (5, -1, -1)$ et $u_3 = (-7, 2, 1)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Pour tout indice i, remarquer que $f_j(\mathrm{X}^i) = \dfrac{1}{i + j + 1}$.

En déduire que la matrice A de la famille (ε^*) dans (e^*) est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}$

1. Utiliser la méthode du pivot pour trouver A^{-1}.
2. Si $P = a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2 + d\mathrm{X}^3$, soit $\varphi(P)$ la matrice-ligne $(f_0(P)\ f_1(P)\ f_3(P)\ f_4(P))$.
   Constater que $(a\ b\ c\ d) = \varphi(P)A^{-1}$.
   En déduire $\varepsilon_0 = 16 - 120\mathrm{X} + 240\mathrm{X}^2 - 140\mathrm{X}^3$ (première ligne de A^{-1}).
   Trouver de même $\begin{cases} \varepsilon_2 = 240 - 2700\mathrm{X} + 6480\mathrm{X}^2 - 4200\mathrm{X}^3 \\ \varepsilon_3 = -140 + 1680\mathrm{X} - 4200\mathrm{X}^2 + 2800\mathrm{X}^3 \end{cases}$

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On applique la méthode du pivot. On trouve $\operatorname{rang} A = 3$.

Le noyau est la droite engendrée par $(2, 0, 1, -1)$.

Le vecteur (x, y, z, t) est dans $\operatorname{Im} f \Leftrightarrow 2x + 11y + 5z - 8t = 0$.