# Énoncés des exercices

**Exercice 1** [ Indication ] [ Correction ]

Montrer ques les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

**Exercice 2** [ Indication ] [ Correction ]

Vérifier que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 232 & -15 \end{pmatrix}$ sont semblables, et trouver toutes les matrices inversibles $P$ telles que $P^{-1}AP = B$.

**Exercice 3** [ Indication ] [ Correction ]

Montrer qu'il existe $P$ tq $B = P^{-1}AP$ où $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 4** [ Indication ] [ Correction ]

Soit $f$ un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Montrer que $\varepsilon_1 = (i, 2)$, $\varepsilon_2 = (-2i, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Montrer que la matrice $B$ de $f$ dans la base $(\varepsilon)$ est diagonale. En déduire $A^n$.

**Exercice 5** [ Indication ] [ Correction ]

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\varepsilon_1 = (0, 1, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que la matrice de $f$ dans la base $(\varepsilon)$ est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. En déduire $A^n$.

# Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Noter $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A$ dans la base canonique.

Il faut trouver $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ tels que $f(\varepsilon_1) = f(\varepsilon_3) = \overrightarrow{0}$ et $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Poser $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et résoudre $PB = AP$.

On trouve les matrices $P = \begin{pmatrix} -15b - d & b \\ -8b - 16d & d \end{pmatrix}$, inversibles si $(b, d) \neq (0, 0)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Noter $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, de matrice $A$ dans la base canonique $(e) = e_1, e_2, e_3, e_4$.

Il faut trouver $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ tels que $\begin{cases} f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, \quad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad f(\varepsilon_4) = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \end{cases}$

On sera amené à considérer les puissances successives de $A - \mathrm{I}_4$.

On posera $\varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)$, et on en déduira $\varepsilon_3$, puis $\varepsilon_2$ puis $\varepsilon_1$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $f(\varepsilon_1) = 3\varepsilon_1$ et $f(\varepsilon_2) = -2\varepsilon_2$.

En déduire $A^n$ grâce à l'égalité $A = PB^nP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} i & -2i \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Montrer que la matrice $P$ de la famille $(\varepsilon)$ dans la base $(e)$ est inversible.

La matrice de $f$ dans la base $(\varepsilon)$ est $B = P^{-1}AP$.

On peut aussi remarquer que $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $f(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$.

Donner l'expression de $B^n$ (récurrence facile.)

En déduire que $A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (n+2)2^{n-1} & -n2^{n-1} & n2^{n-1} \\ (n+2)2^{n-1} - 1 & 1 - n2^{n-1} & n2^{n-1} \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}$.