Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, dont la matrice est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Calculer le rang de f.
   Former un système d'équations de $\operatorname{Im} f$. Donner une base de $\operatorname{Im} f$.
2. Former un système d'équations du noyau de f. Donner une base de $\operatorname{Ker} f$.
3. Déterminer l'image et l'image réciproque du sous-espace d'équation $x - y + z - 2t = 0$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

1. Soit X une matrice-colonne à coefficients réels.
   Montrer qu'on a l'équivalence : ${}^{\mathrm{T}}XX = 0 \iff X = 0$.
2. Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.
   Montrer que les matrices A, ${}^{\mathrm{T}}AA$ et $A\,{}^{\mathrm{T}}A$ ont le même rang.
3. Montrer que cela cesse d'être vrai si on considère des matrices à coefficients complexes.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit n un entier strictement positif.

Pour tout entier r de $\{0, \dots, n\}$, on note $J_n(r)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice (i, j) est 1 si $1 \leq i = j \leq r$ et 0 dans tous les autres cas.

En particulier, $J_n(0)$ est la matrice nulle et $J_n(n)$ est la matrice identité.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\operatorname{rang} A = r \Leftrightarrow \exists P, Q$ inversibles telles que $Q^{-1}AP = J_r$.
2. En déduire que les matrices A et ${}^{\mathrm{T}}A$ ont le même rang.
3. Montrer que A peut s'écrire comme une somme de deux matrices inversibles.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose que la matrice AB est nulle et que $A + B$ est inversible.

Montrer que $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B = n$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. L'application f est de rang 2.
   Une base de $\operatorname{Im} f$ est : $a = (1, 0, 2, -1)$ et $b = (0, 1, -1, 2)$.
   Un système d'équations de $\operatorname{Im} f$ est : $2x - y - z = 0, x - 2y + t = 0$.
2. Un système d'équations de $\operatorname{Ker} f$ est : $x = -z + \frac{1}{5}t, y = -z + \frac{3}{5}t$.
   Une base de $\operatorname{Ker} f$ est formée de : $c = (1, 1, -1, 0)$ et $d = (1, 3, 0, 5)$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Pour la question 2, constater que ${}^{\mathrm{T}}AAX = 0 \Rightarrow {}^{\mathrm{T}}X\,{}^{\mathrm{T}}AAX = 0$ et utiliser la question 1.
Pour la question 3, choisir $A = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Constater que le résultat est évident si $r = 0$ ou $r = n$.
   Si $1 \leq r \leq n-1$, considérer $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, de matrice A dans la base canonique.
   Noter H un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans $\mathbb{K}^n$.
   Munir $\mathbb{K}^n$ d'une base adaptée à cette somme directe.
   Montrer que f transforme une base de H en une famille libre.
   Compléter cette famille libre en une base de $\mathbb{K}^n$.
   Considérer enfin la matrice de f entre ces deux bases.
2. Transposer l'égalité $Q^{-1}AP = J_n(r)$ et utiliser la question précédente.
3. Écrire $J_n(r) = K_n + L_n$, avec $K_n = \mathrm{I}_n + J_n(r)$ et $L_n = -\mathrm{I}_n$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Soient f, g les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ de matrices A, B dans la base canonique.
Notez que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$. En déduire l'inégalité $\operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g \leq n$.
Montrer que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \mathbb{K}^n$ et en déduire l'inégalité $\operatorname{rang}(f) + \operatorname{rang}(g) \geq n$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.