Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, dont la matrice est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Calculer le rang de f.
   Former un système d'équations de $\operatorname{Im} f$. Donner une base de $\operatorname{Im} f$.
2. Former un système d'équations du noyau de f. Donner une base de $\operatorname{Ker} f$.
3. Déterminer l'image et l'image réciproque du sous-espace d'équation $x - y + z - 2t = 0$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

1. Soit X une matrice-colonne à coefficients réels.
   Montrer qu'on a l'équivalence : ${}^{\mathrm{T}}XX = 0 \iff X = 0$.
2. Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.
   Montrer que les matrices A, ${}^{\mathrm{T}}AA$ et $A\,{}^{\mathrm{T}}A$ ont le même rang.
3. Montrer que cela cesse d'être vrai si on considère des matrices à coefficients complexes.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit n un entier strictement positif.
Pour tout entier r de $\{0, \ldots, n\}$, on note $J_n(r)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice (i, j) est 1 si $1 \leq i = j \leq r$ et 0 dans tous les autres cas.
En particulier, $J_n(0)$ est la matrice nulle et $J_n(n)$ est la matrice identité.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\operatorname{rang} A = r \Leftrightarrow \exists P, Q$ inversibles telles que $Q^{-1}AP = J_r$.
2. En déduire que les matrices A et ${}^{\mathrm{T}}A$ ont le même rang.
3. Montrer que A peut s'écrire comme une somme de deux matrices inversibles.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose que la matrice AB est nulle et que $A + B$ est inversible.
Montrer que $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B = n$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. L'application f est de rang 2.
   Une base de $\operatorname{Im} f$ est : $a = (1, 0, 2, -1)$ et $b = (0, 1, -1, 2)$.
   Un système d'équations de $\operatorname{Im} f$ est : $2x - y - z = 0, x - 2y + t = 0$.
2. Un système d'équations de $\operatorname{Ker} f$ est : $x = -z + \frac{1}{5}t, y = -z + \frac{3}{5}t$.
   Une base de $\operatorname{Ker} f$ est formée de : $c = (1, 1, -1, 0)$ et $d = (1, 3, 0, 5)$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Pour la question 2, constater que ${}^{\mathrm{T}}AAX = 0 \Rightarrow {}^{\mathrm{T}}X\,{}^{\mathrm{T}}AAX = 0$ et utiliser la question 1.

Pour la question 3, choisir $A = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Constater que le résultat est évident si $r = 0$ ou $r = n$.
   Si $1 \le r \le n - 1$, considérer $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, de matrice A dans la base canonique.
   Noter H un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans $\mathbb{K}^n$.
   Munir $\mathbb{K}^n$ d'une base adaptée à cette somme directe.
   Montrer que f transforme une base de H en une famille libre.
   Compléter cette famille libre en une base de $\mathbb{K}^n$.
   Considérer enfin la matrice de f entre ces deux bases.
2. Transposer l'égalité $Q^{-1}AP = J_n(r)$ et utiliser la question précédente.
3. Écrire $J_n(r) = K_n + L_n$, avec $K_n = \mathrm{I}_n + J_n(r)$ et $L_n = -\mathrm{I}_n$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Soient f, g les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ de matrices A, B dans la base canonique.
Notez que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$. En déduire l'inégalité $\operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g \le n$.
Montrer que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \mathbb{K}^n$ et en déduire l'inégalité $\operatorname{rang}(f) + \operatorname{rang}(g) \ge n$.