Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Déterminer relativement aux bases canoniques la matrice A de l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par $f(1,-1)=(-1,-2,5)$ et $f(2,-3)=(0,5,4)$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f un morphisme de E muni de la base $(e)=(e_1,e_2,e_3)$, vers F muni de $(\varepsilon)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.
Soit $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&2&-3\end{pmatrix}$ la matrice de f dans les bases (e) et (ε).

1. Déterminer la matrice B de f quand on remplace la base (e) par la base (e') définie par $e'_1=e_2+e_3$, $e'_2=e_3+e_1$, $e'_3=e_1+e_2$.
2. On garde (e') mais on remplace (ε) par (ε') : $\varepsilon'_1=2\varepsilon_1+\varepsilon_2$ et $\varepsilon'_2=5\varepsilon_1+3\varepsilon_2$.
   Déterminer la matrice C de f dans les bases (e') et (ε').

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit f un endomorphisme de E $(\dim E=n\geq 1)$.
On suppose que $f^n=0$ et $f^{n-1}\neq 0$.
Montrer qu'il existe une base de E où la matrice de f est $A=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\dots&\dots&0&1\\0&\dots&\dots&0&0\end{pmatrix}$

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dont la matrice est $A=\begin{pmatrix}0&1&5&9\\2&1&6&8\\0&0&0&3\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$ dans la base canonique.

On pose que $\varepsilon_1=(-13,-37,3,1)$, $\varepsilon_2=(1,-1,0,0)$, $\varepsilon_3=(1,2,0,0)$, et $\varepsilon_4=(-7,1,-5,5)$.
Montrer que $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ forment une base de $\mathbb{R}^4$.
Montrer que la matrice de f dans la base (ε) est diagonale.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, dont la matrice dans la base canonique est $A=\begin{pmatrix}-1&-4&-2&-2\\-4&-1&-2&-2\\2&2&1&4\\2&2&4&1\end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On trouve $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -11 & -9 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On trouve $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -22 \\ -2 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Se donner un vecteur u de E tel que $f^{n-1}(u) \neq \overrightarrow{0}$.
Montrer que $u_1 = f^{n-1}(u), u_2 = f^{n-2}(u), \ldots, u_{n-1} = f(u), u_n = u$ forment une base de E.
Vérifier que la matrice de f dans cette base est la matrice A de l'énoncé.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

- Vérifier que la matrice P de la famille (ε) dans la base canonique est inversible.
- Montrer que $\forall\, k \in \{1, 2, 3, 4\},\ \exists\, \lambda_k \in \mathbb{R},\ f(\varepsilon_k) = \lambda_k \varepsilon_k$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Montrer que le système $f(u) = \lambda u$ a des solutions non nulles $\Leftrightarrow \lambda \in \{-3, 3\}$.
Vérifier que $\text{Ker}\,(f - 3\text{Id})$ est le plan engendré par $\varepsilon_1 = (1, -1, 0, 0)$ et $\varepsilon_2 = (0, -1, 1, 1)$.
Vérifier que $\text{Ker}\,(f + 3\text{Id})$ est le plan engendré par $\varepsilon_3 = (1, 1, -1, 0)$ et $\varepsilon_4 = (0, 0, -1, 1)$.
Justifier pourquoi ces quatre vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^4$.
Conclure en exprimant la matrice de f dans cette base.