

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Déterminer la matrice  $A$  dans la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  de l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  sachant que  $(1, 2, -1)$  appartient à  $\text{Ker } f$ , que  $f(e_1) = (2, 1, 1)$  et que  $f(e_2) = (3, 0, -1)$ .

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , linéaire, de matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  dans les bases canoniques. Déterminer l'image et le noyau de  $f$ .

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , linéaire, de matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 2a \\ a & -1 & a \\ 2a & 2a & 1 \\ 2a+1 & a & 2a+1 \end{pmatrix}$  dans les bases canoniques. Déterminer l'image et noyau de  $f$ .

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Image du plan  $P : x + y + z = 0$  par  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  définie par  $\begin{cases} X = 5x + 2y - z \\ Y = -8x - 3y + 2z \\ Z = -x - 2y - 3z \\ T = 3x - y - 5z \end{cases}$   
Image réciproque de l'hyperplan  $H : X + Y + Z + T = 0$ .

**EXERCICE 5** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Dans l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}_3[X]$ , on pose  $A = X^4 - 1$  et  $B = X^4 - X$ .  
Soit  $\varphi : E \rightarrow E$  définie par  $\varphi(P) = R$ , où  $R$  est le reste dans la division de  $AP$  par  $B$ .  
Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ . Quel est son noyau ? son image ?

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[ Retour à l'énoncé \]](#)

On trouve  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[ Retour à l'énoncé \]](#)

Montrer que  $\text{Ker } f$  est le plan de  $\mathbb{R}^4$  engendré par  $a = (-5, -7, 1, 0)$  et  $b = (-2, 1, 0, 1)$ .

En déduire que  $\text{Im } f = 2$  est un plan dont une base est formée de  $\begin{cases} f(e_1) = (2, -1, 3) \\ f(e_2) = (-1, 2, 0) \end{cases}$

L'équation de  $\text{Im } f$  dans la base canonique est  $2X + Y - Z = 0$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[ Retour à l'énoncé \]](#)

– Si  $a = -1$ ,  $\text{Ker } f$  est la droite engendrée par  $(1, -1, 0)$ .

$\text{Im } f$  est alors le plan engendré par  $(1, 0, -1, 0)$  et  $(0, 1, 1, 1)$ .

– Si  $a \neq -1$  et  $a \neq \frac{1}{2}$ , l'application  $f$  est injective.

Dans ce cas l'image de  $f$  est l'hyperplan d'équation  $X + Z - T = 0$ .

– Si  $a = \frac{1}{2}$ ,  $\text{Ker } f$  est la droite engendrée par  $(1, 0, -1)$ .

Les vecteurs  $(1, \frac{1}{2}, 1, 2)$  et  $(-\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2})$  forment une base du plan  $\text{Im } f$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[ Retour à l'énoncé \]](#)

L'image de  $P$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $v = (3, -5, 1, 4)$ .

L'image réciproque de  $H$  est le plan  $Q$  d'équation  $x + 4y + 7z = 0$  dans la base canonique.

Le plan  $Q$  est engendré par les vecteurs  $(4, -1, 0)$  et  $(7, 0, -1)$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[ Retour à l'énoncé \]](#)

L'unicité de la division euclidienne permet de prouver la linéarité de  $\varphi$ .

$\text{Ker } P$  est la droite vectorielle engendrée par  $X^3 + X^2 + X$ .

L'image de  $\varphi$  est l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{R}_3[X]$  qui s'annulent en 1.