Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Déterminer la matrice A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ sachant que $(1, 2, -1)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$, que $f(e_1) = (2, 1, 1)$ et que $f(e_2) = (3, 0, -1)$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, linéaire, de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques.
Déterminer l'image et le noyau de f.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, linéaire, de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 2a \\ a & -1 & a \\ 2a & 2a & 1 \\ 2a+1 & a & 2a+1 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques.
Déterminer l'image et noyau de f.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Image du plan $P : x + y + z = 0$ par $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $\begin{cases} X = 5x + 2y - z \\ Y = -8x - 3y + 2z \\ Z = -x - 2y - 3z \\ T = 3x - y - 5z \end{cases}$
Image réciproque de l'hyperplan $H : X + Y + Z + T = 0$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.
Soit $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(P) = R$, où R est le reste dans la division de AP par B.
Montrer que φ est un endomorphisme de E. Quel est son noyau ? son image ?

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On trouve $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par $a = (-5, -7, 1, 0)$ et $b = (-2, 1, 0, 1)$.

En déduire que $\operatorname{Im} f = 2$ est un plan dont une base est formée de $\begin{cases} f(e_1) = (2, -1, 3) \\ f(e_2) = (-1, 2, 0) \end{cases}$

L'équation de $\operatorname{Im} f$ dans la base canonique est $2X + Y - Z = 0$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

- Si $a = -1$, $\operatorname{Ker} f$ est la droite engendrée par $(1, -1, 0)$.
  $\operatorname{Im} f$ est alors le plan engendré par $(1, 0, -1, 0)$ et $(0, 1, 1, 1)$.
- Si $a \neq -1$ et $a \neq \frac{1}{2}$, l'application f est injective.
  Dans ce cas l'image de f est l'hyperplan d'équation $X + Z - T = 0$.
- Si $a = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Ker} f$ est la droite engendrée par $(1, 0, -1)$.
  Les vecteurs $(1, \frac{1}{2}, 1, 2)$ et $(-\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2})$ forment une base du plan $\operatorname{Im} f$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

L'image de P est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $v = (3, -5, 1, 4)$.

L'image réciproque de H est le plan Q d'équation $x + 4y + 7z = 0$ dans la base canonique.

Le plan Q est engendré par les vecteurs $(4, -1, 0)$ et $(7, 0, -1)$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

L'unicité de la division euclidienne permet de prouver la linéarité de φ.

$\operatorname{Ker} P$ est la droite vectorielle engendrée par $X^3 + X^2 + X$.

L'image de φ est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ qui s'annulent en 1.