



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Pour A , carrée d'ordre n et de terme général a_{ij} , on pose $\text{tr } A = \sum_{j=1}^n a_{jj}$ (*trace* de A).

Montrer que pour des matrices A de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et B de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$, on a $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que l'égalité $AB - BA = I$ est impossible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose que pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\text{tr}(AM) = \text{tr}(BM)$.

Montrer que les matrices A et B sont égales.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une matrice unique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour toute matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(X) = \text{tr}(AX)$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices antisymétriques.

Soit A une matrice fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Rappeler quelle est la dimension de E et en donner une base simple.
2. On définit l'application f sur E par $f(M) = {}^T A M + M A$.
Montrer que f est un endomorphisme de E . Calculer $\text{tr } f$ en fonction de $\text{tr } A$.