Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Pour A, carrée d'ordre n et de terme général a_{ij}, on pose $\operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$ (*trace* de A).

Montrer que pour des matrices A de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et B de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Montrer que l'égalité $AB - BA = I$ est impossible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose que pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$.
Montrer que les matrices A et B sont égales.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une matrice unique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour toute matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(X) = \operatorname{tr}(AX)$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices antisymétriques.
Soit A une matrice fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Rappeler quelle est la dimension de E et en donner une base simple.
2. On définit l'application f sur E par $f(M) = {}^{\mathrm{T}}A\,M + M\,A$.
   Montrer que f est un endomorphisme de E. Calculer $\operatorname{tr} f$ en fonction de $\operatorname{tr} A$.