Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient a, b deux réels, et E l'ensemble des matrices $M(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu b & \lambda + \mu a \end{pmatrix}$, $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

Montrer que E est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

A quelle condition sur a, b est-ce un corps ?

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Pour tout réel t, on définit la matrice $A(t)$ par $A(t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1 - \frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A(s)A(t)$.
2. Calculer $(A(t) - I)^3$.
3. Trouver $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n)$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A(t)^n = \alpha_n\, A(t)^2 + \beta_n\, A(t) + \gamma_n\, I$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit $E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3c & a - 3c & b \\ 3b & -3b + 3c & a - 3c \end{pmatrix},\ \text{avec } a, b, c \text{ réels} \right\}$.

Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

En donner la dimension et une base.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient le système $\begin{cases} \forall (i, j),\ a_{ij} \geq 0 \\ \forall i,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \end{cases}$

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est stable pour le produit des matrices.
2. Déterminer les matrices A de $\mathcal{D}$, inversibles et telles que $A^{-1} \in \mathcal{D}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Montrer que l'ensemble E des $M(x, y) = \begin{pmatrix} x + y & 4y \\ -y & x - y \end{pmatrix}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

En donner une base et la dimension. Est-ce un corps ?

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

E est le plan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par I et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Calculer J^2 et en déduire la stabilité de E pour le produit.

Chercher à quelle condition $M(\lambda, \mu)$ est inversible dans E.

En déduire que E est un corps si et seulement si $b > \frac{a^2}{4}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

- Remarquer que $A(t)$ s'écrit $A(t) = I + tJ + \frac{t^2}{2}K$.
  Vérifier $J^2 = K$, $K^2 = 0$ et $JK = KJ = 0$. En déduire $A(t)A(s) = A(t+s)$.
- Prouver que $(A(t) - I)^2 = t^2 K$, puis $(A(t) - I)^3 = 0$.
- Poser $A(t) = I + B(t)$ avec $B(t) = A(t) - I$.
  Calculer alors $A(t)^n$ en utilisant la formule du binôme.
  On trouve $A(t)^n = \dfrac{n(n-1)}{2}A(t)^2 - n(n-2)A(t) + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}I$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

E est le sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par $I = M(1,0,0), J = M(0,1,0), K = M(0,0,1)$.

Vérifier que I, J, K sont libres.

Calculer JK et KJ et en déduire que E est une sous-algèbre de dimension 3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

- Constater que si $A \in \mathcal{D}$, alors ses coefficients de A sont inférieurs ou égaux à 1.
  Vérifier que si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont dans $\mathcal{D}$, alors $C = AB = (c_{ij})$ est dans $\mathcal{D}$.
- Avec les mêmes notations, supposer que C soit égale à la matrice identité.
  Montrer que chaque ligne de A ne porte qu'un seul coefficient non nul, et qui vaut 1.
  Noter $\sigma(i)$ le numéro de colonne où se trouve ce coefficient.
  Montrer que σ est une bijection de $\{1, \ldots, n\}$. Établir une réciproque.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

E est le plan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par I et $J = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer J^2 et en déduire que E est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que tout matrice non nulle de E est inversible dans E (qui est donc un corps.)