Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Trouver toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Trouver toutes les matrices B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $B^2 = I$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soit $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position (i,j) qui vaut 1.
Pour tous indices i,j,k,l de $\{1,\ldots,n\}$, calculer $E_{ij}E_{kl}$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Quelles sont les matrices qui commutent avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soit n un entier strictement positif. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow M$ est de la forme $\lambda \mathrm{I}_n$, où λ est un scalaire quelconque.
2. Montrer que M commute avec toutes les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow M$ est de la forme $\lambda \mathrm{I}_n$, où λ est un scalaire quelconque.

EXERCICE 6 [Indication] [Correction]

On pose $\omega = \exp \dfrac{2i\pi}{n}$, où n est un entier positif.
Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de termes généraux $a_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$ et $b_{ij} = \omega^{-(i-1)(j-1)}$.
Calculer les produits A^2, B^2, AB et BA. Calculer A^{-1}.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Les solutions sont les matrices de l'une des formes suivantes, avec $(a, \lambda) \in \mathbb{R}^2$:

$$\pm I_2, \quad \begin{pmatrix} a & \lambda \\ \frac{1-a^2}{\lambda} & -a \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que si on pose $A = 2B - I$, on a $A^2 = I \Leftrightarrow 4B^2 - 4B + I = I \Leftrightarrow B^2 = B$.
On peut alors utiliser le résultat de l'exercice précédent.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

On a l'égalité $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$, avec $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Poser $A = (a_{ij})$ et résoudre le système $AJ = JA$.
On trouve les matrices $A = aI + bJ + cJ^2 + dJ^3$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On considère les matrices E_{rs} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si M commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ elle commute avec les E_{rs}.
   Identifier alors les coefficients d'indice (i, j) de ME_{rs} et de $E_{rs}M$.
2. Se donner M qui commute avec toutes les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Considérer alors $A_{rs} = \mathrm{I}_n + E_{rs}$, et montrer que M commute avec E_{rs}.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

- Le coefficient d'indice i, j de $C = A^2$ vaut n si $i = j = 1$ ou si $i + j = n + 2$, et 0 sinon.
- Remarquer que B est conjuguée de A. En déduire $B^2 = A^2$.
- Prouver que $AB = nI_n$ et en déduire $BA = nI_n$ et $A^{-1} = \frac{1}{n}B$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.