Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Trouver toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Trouver toutes les matrices B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $B^2 = I$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position (i, j) qui vaut 1.
Pour tous indices i, j, k, l de $\{1, \ldots, n\}$, calculer $E_{ij}E_{kl}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Quelles sont les matrices qui commutent avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit n un entier strictement positif. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow M$ est de la forme $\lambda \mathrm{I}_n$, où λ est un scalaire quelconque.
2. Montrer que M commute avec toutes les matrices <u>inversibles</u> de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow M$ est de la forme $\lambda \mathrm{I}_n$, où λ est un scalaire quelconque.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

On pose $\omega = \exp \dfrac{2i\pi}{n}$, où n est un entier positif.
Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de termes généraux $a_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$ et $b_{ij} = \omega^{-(i-1)(j-1)}$.
Calculer les produits A^2, B^2, AB et BA. Calculer A^{-1}.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Les solutions sont les matrices de l'une des formes suivantes, avec $(a, \lambda) \in \mathbb{R}^2$:

$$\pm I_2, \quad \begin{pmatrix} a & \lambda \\ \frac{1-a^2}{\lambda} & -a \end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que si on pose $A = 2B - I$, on a $A^2 = I \Leftrightarrow 4B^2 - 4B + I = I \Leftrightarrow B^2 = B$.
On peut alors utiliser le résultat de l'exercice précédent.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

On a l'égalité $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$, avec $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Poser $A = (a_{ij})$ et résoudre le système $AJ = JA$.
On trouve les matrices $A = aI + bJ + cJ^2 + dJ^3$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On considère les matrices E_{rs} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si M commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ elle commute avec les E_{rs}.
   Identifier alors les coefficients d'indice (i, j) de ME_{rs} et de $E_{rs}M$.
2. Se donner M qui commute avec toutes les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Considérer alors $A_{rs} = \mathrm{I}_n + E_{rs}$, et montrer que M commute avec E_{rs}.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

- Le coefficient d'indice i, j de $C = A^2$ vaut n si $i = j = 1$ ou si $i + j = n + 2$, et 0 sinon.
- Remarquer que B est conjuguée de A. En déduire $B^2 = A^2$.
- Prouver que $AB = nI_n$ et en déduire $BA = nI_n$ et $A^{-1} = \frac{1}{n}B$.