CH 14 : SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

Plan (Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)

****

****

I. QUANTITE DE MOUVEMENT TOTALE

Soit (S) un système de n particules de masse m_i, de quantité de mouvement $\vec{p}_i$, dans un référentiel (R) ; la quantité de mouvement totale s'écrit :

$$\boxed{\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i}$$

Rq : $\vec{p}$ est aussi appelée « **résultante cinétique** » du système (S).

II. CENTRE D'INERTIE

• Le centre d'inertie du système (S) est un point G tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$$

Rq : en prenant pour origine le point G, il vient : $\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}}$

• Posons $m=\sum_{i=1}^{n} m_i$, et dérivons la relation précédente par rapport au temps :

$$m\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}=\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} \Rightarrow m\vec{v}_G=\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i \quad \text{ou :} \quad \boxed{\vec{p}=m\vec{v}_G} \quad (1)$$

Rq : la résultante cinétique est égale à la quantité de mouvement d'un point matériel fictif, confondu avec G et affecté de toute la masse du système.

III. REFERENTIEL BARYCENTRIQUE OU DU CENTRE DE MASSE

III.1. DEFINITION

Le référentiel barycentrique (R*) du système (S), relativement au référentiel (R), est animé par rapport à (R) d'un mouvement de **translation** de vitesse $\vec{v}_G(t)$ et a pour origine G.

III.2. PROPRIETE

D'après la relation (1), on a dans (R*) : $\vec{v}_G^*=\vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{p}^*=\vec{0}}$

Rq : cette propriété ne suffit pas à définir (R*), car pour un référentiel (où G serait fixe) en rotation par rapport à (R), on aurait également $\vec{p}^*=\vec{0}$.

IV. MOMENT CINETIQUE TOTAL

IV.1. DEFINITION

Pour le système (S), dans le référentiel (R), par rapport à un point O quelconque, on définit le moment cinétique total par :

$$\boxed{\vec{\sigma}_{o/R}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OM_i}\wedge\vec{p}_i}$$

IV.2. MOMENT CINETIQUE BARYCENTRIQUE

• Le moment cinétique barycentrique s'écrit : $\vec{\sigma}_o^*=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OM_i}\wedge\vec{p}_i^*$

• Montrons que ce moment cinétique est **indépendant du point O** choisi ; on a :

$$\vec{\sigma}_{o'}^*=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{O'M_i}\wedge\vec{p}_i^*=\vec{\sigma}_o^*+\overrightarrow{O'O}\wedge\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i^*\right) \; ; \; \text{or : } \sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i^*=\vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}_{o'}^*=\vec{\sigma}_o^*=\vec{\sigma}^*}$$

Rq : il est souvent commode de prendre le G comme origine ⇒ dans ce cas : $\boxed{\vec{\sigma}^*=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GM_i}\wedge\vec{p}_i^*}$

IV.3. PREMIER THEOREME DE KÖNIG

Nous allons relier le moment cinétique dans le référentiel (R) au moment cinétique barycentrique , soit :

$$\vec{\sigma}_{o/R}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OM_i}\wedge\vec{p}_i=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OM_i}\wedge m_i\vec{v}_i=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OM_i}\wedge m_i(\vec{v}_G+\vec{v}_i^*)=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OM_i}\wedge m_i\vec{v}_i^*+\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{OM_i}\wedge\vec{v}_G \Rightarrow$$

puisque $m\overrightarrow{OG}=\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{OM_i}$: $\boxed{\vec{\sigma}_{o/R}=\vec{\sigma}^*+m\overrightarrow{OG}\wedge\vec{v}_G=\vec{\sigma}^*+\overrightarrow{OG}\wedge\vec{p}}$