



# MECANIQUE DU POINT MATERIEL

## COURS

### CH 14 : SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

**Plan** (Cliquez sur le titre pour accéder au paragraphe)

\*\*\*\*\*

- I. QUANTITE DE MOUVEMENT TOTALE ..... 1
- II. CENTRE D'INERTIE ..... 1
- III. REFERENTIEL BARYCENTRIQUE OU DU CENTRE DE MASSE ..... 2
  - III.1. DEFINITION ..... 2
  - III.2. PROPRIETE ..... 2
- IV. MOMENT CINETIQUE TOTAL ..... 2
  - IV.1. DEFINITION ..... 2
  - IV.2. MOMENT CINETIQUE BARYCENTRIQUE ..... 2
  - IV.3. PREMIER THEOREME DE KÖNIG ..... 2
- V. THEOREME DE LA RESULTANTE CINETIQUE ..... 3
  - V.1. ENONCE DU THEOREME ..... 3
  - V.2. CAS D'UN SYSTEME ISOLE ..... 3
- VI. THEOREMES DU MOMENT CINETIQUE ..... 3
  - VI.1. EXPRESSION DANS UN REFERENTIEL QUELCONQUE ..... 3
  - VI.2. EXPRESSION DANS LE REFERENTIEL BARYCENTRIQUE ..... 4
  - VI.3. CAS D'UN SYSTEME ISOLE ..... 4
- VII. ENERGIE CINETIQUE D'UN SYSTEME DE PARTICULES ..... 4
  - VII.1. EXPRESSION DE L'ENERGIE ..... 4
  - VII.2. DEUXIEME THEOREME DE KÖNIG ..... 4
  - VII.3. THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE ..... 5
- VIII. ENERGIE MECANIQUE ..... 5
  - VIII.1. ENERGIE POTENTIELLE ..... 5
  - VIII.2. CAS OU TOUTES LES FORCES SONT CONSERVATIVES ..... 5

\*\*\*\*\*

## I. QUANTITE DE MOUVEMENT TOTALE

Soit (S) un système de n particules de masse  $m_i$ , de quantité de mouvement  $\vec{p}_i$ , dans un référentiel (R) ; la quantité de mouvement totale s'écrit :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

Rq :  $\vec{p}$  est aussi appelée « **résultante cinétique** » du système (S).

## II. CENTRE D'INERTIE

• Le centre d'inertie du système (S) est un point G tel que :

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{OM}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Rq : en prenant pour origine le point G, il vient :

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{GM}_i = \vec{0}$$

- Posons  $m = \sum_{i=1}^n m_i$ , et dérivons la relation précédente par rapport au temps :

$$m \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\overrightarrow{OM}_i}{dt} \Rightarrow m\vec{v}_G = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad \text{ou : } \boxed{\vec{p} = m\vec{v}_G} \quad (1)$$

**Rq** : la résultante cinétique est égale à la quantité de mouvement d'un point matériel fictif, confondu avec G et affecté de toute la masse du système.

### III. REFERENTIEL BARYCENTRIQUE OU DU CENTRE DE MASSE

#### III.1. DEFINITION

Le référentiel barycentrique ( $R^*$ ) du système (S), relativement au référentiel (R), est animé par rapport à (R) d'un mouvement de **translation** de vitesse  $\vec{v}_G(t)$  et a pour origine G.

#### III.2. PROPRIETE

D'après la relation (1), on a dans ( $R^*$ ) :  $\vec{v}_G^* = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{p}^* = \vec{0}}$

**Rq** : cette propriété ne suffit pas à définir ( $R^*$ ), car pour un référentiel (où G serait fixe) en rotation par rapport à (R), on aurait également  $\vec{p}^* = \vec{0}$ .

### IV. MOMENT CINETIQUE TOTAL

#### IV.1. DEFINITION

Pour le système (S), dans le référentiel (R), par rapport à un point O quelconque, on définit le moment cinétique total par :

$$\boxed{\vec{\sigma}_{o/R} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{p}_i}$$

#### IV.2. MOMENT CINETIQUE BARYCENTRIQUE

- Le moment cinétique barycentrique s'écrit :  $\vec{\sigma}_o^* = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{p}_i^*$
- Montrons que ce moment cinétique est **indépendant du point O** choisi ; on a :

$$\vec{\sigma}_o^* = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{O'M}_i \wedge \vec{p}_i^* = \vec{\sigma}_o^* + \overrightarrow{O'O} \wedge \left( \sum_{i=1}^n \vec{p}_i^* \right) ; \quad \text{or : } \sum_{i=1}^n \vec{p}_i^* = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}_o^* = \vec{\sigma}_o^* = \vec{\sigma}^*}$$

**Rq** : il est souvent commode de prendre le G comme origine  $\Rightarrow$  dans ce cas :  $\boxed{\vec{\sigma}^* = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{GM}_i \wedge \vec{p}_i^*}$

#### IV.3. PREMIER THEOREME DE KÖNIG

Nous allons relier le moment cinétique dans le référentiel (R) au moment cinétique barycentrique, soit :

$$\vec{\sigma}_{o/R} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i (\vec{v}_G + \vec{v}_i^*) = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_i^* + \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{v}_G \Rightarrow$$

puisque  $m\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM}_i$  :  $\boxed{\vec{\sigma}_{o/R} = \vec{\sigma}^* + m\overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}_G = \vec{\sigma}^* + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{p}}$