

IV Familles sommables

IV.1 Définition et caractérisation des familles sommables

Une famille $u = (u_i)_{i \in I}$ indexée par un ensemble I est une application de source I . On s'intéresse ici au cas où I est strictement dénombrable c'est à dire qu'il existe une bijection σ de \mathbb{N} sur I . On suppose également que la famille u est à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie. Dans ces conditions, on dit que la famille u est sommable si l'on peut choisir la bijection σ de sorte que la fonction u_σ en escalier sur $[0, +\infty[$, coïncidant sur chaque intervalle $[n, n+1[$ ($n \in \mathbb{N}$) avec la constante $u_{\sigma(n)}$, soit intégrable sur $[0, +\infty[$. On montre enfin que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+} u_\sigma$ est indépendante du choix de la bijection σ . Sa valeur s'appelle somme de la

famille (sommable) u et se note $\sum_{i \in I} u_i$. On a ainsi $\sum_{i \in I} u_i = \int_{\mathbb{R}_+} u_\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$.

Théorème CARACTÉRISATION DES FAMILLES SOMMABLES

Soit $u = (u_i)_{i \in I}$ une famille indexée par un ensemble dénombrable à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie E . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) La famille u est sommable
- (ii) Il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ soit normalement convergente
- (iii) Pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est normalement convergente
- (iv) L'ensemble des sommes $\sum_{i \in J} \|u_i\|$, où J décrit l'ensemble des parties finies de I , est une partie majorée de \mathbb{R}_+
- (v) Il existe une suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante de parties finies de I recouvrant I (i.e. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = I$) telle que les sommes $\sum_{i \in J_n} \|u_i\|$ soient majorées
- (vi) Pour toute suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante de parties finies de I recouvrant I les sommes $\sum_{i \in J_n} \|u_i\|$ sont majorées

Lorsque l'une de ces conditions est vérifiée la somme de u est donnée par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{\sigma(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in J_n} u_i \quad (1.9)$$

- ☞ L'assertion (iv) montre que toute sous-famille d'une famille sommable est sommable. La formule (1.9) est encore valable pour tout recouvrement croissant de I par une suite croissante de parties (pas spécialement finies) de I .
- ☞ L'assertion (ii) montre qu'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie est sommable si et seulement si la série associée est normalement convergente.

\Rightarrow Prenons la suite anharmonique : $I = \mathbb{N}^*$ et $u = \left(\frac{(-1)^i}{i} \right)_{i \in I}$. Le choix dans (v) du recouvrement croissant de I par les segments $J_n = \llbracket 1, 2n \rrbracket$ donne

$$\sum_{i \in J_n} u_i = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) \text{ soit encore}$$

$$\sum_{i \in J_n} u_i = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = (\ln n + \gamma) - (\ln(2n) + \gamma) + o(1) = -\ln 2 + o(1)$$

d'après la formule (1.8) du §II.3. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_n} u_i = -\ln 2 = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i$. Mais on

peut aussi former un recouvrement croissant $(J'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de I par des parties finies telles que les sommes partielles $\sum_{i \in J'_n} u_i$ de la famille u le long de ce recouvrement divergent en

convergeant dans $\overline{\mathbb{R}}$:

L'exemple $J'_n = \{2k \mid k \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket\} \cup \{2k-1 \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ donne en effet (par l'usage comme ci-dessus de la formule (9) du §2.3) $\sum_{i \in J'_n} u_i \sim \frac{1}{2} \ln n$.

L'exemple $J''_n = \{2k \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \cup \{2k-1 \mid k \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket\}$ donne un recouvrement croissant de I par des parties finies telles que $\sum_{i \in J''_n} u_i \sim -\frac{1}{2} \ln n$.

\Rightarrow Si $u = (u_i)_{i \in I}$ et $v = (v_j)_{j \in J}$ sont deux familles sommables à valeurs dans une algèbre normée \mathcal{A} de dimension finie, alors la famille produit $w = (u_i v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_i v_j = \sum_{i \in I} u_i \sum_{j \in J} v_j.$$

\Rightarrow Étude de la sommabilité de la famille de réels positifs u indexée par \mathbb{N}^{*p} définie par

$$u_{(n_1, \dots, n_p)} = \frac{1}{(n_1 + \dots + n_p)^\alpha} \quad (p \text{ fixé dans } \mathbb{N}^* \text{ et } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}_+^*) :$$

La moyenne géométrique de p réels positifs étant inférieure à leur moyenne arithmétique,

on a $u_{(n_1, \dots, n_p)} \leq \frac{1}{n_1^{\frac{\alpha}{p}} \dots n_p^{\frac{\alpha}{p}}} = v_{(n_1, \dots, n_p)}$. La famille v est la famille produit de la suite

riemannienne $\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{p}}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ p fois par elle même. Elle est donc sommable lorsque $\alpha > p$.

Par domination, la famille u est sommable lorsque $\alpha > p$ et sa somme vérifie

$$\sum_{(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^{*p}} \frac{1}{(n_1 + \dots + n_p)^\alpha} \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{p}}} \right)^p.$$

Lorsque $\alpha \leq p$, on a $u_{(n_1, \dots, n_p)} \geq \frac{1}{(n_1 + \dots + n_p)^p} = w_{(n_1, \dots, n_p)}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $J_n = \{(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^{*p} \mid n_1 + \dots + n_p \leq n\}$. $(J_n)_{n \geq p}$ est un recouvrement croissant de \mathbb{N}^{*p} par une suite de parties finies vérifiant $\text{Card}(J_n) = C_n^p$. D'où