

## Séries Numériques I : cinq exercices

---

**1** Étudier la série de terme général  $u_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$  où  $\alpha$  est un réel donné .



### Indication exercice 1

---

**2** Règle de Raabe-Duhamel.

Étudier la série de terme général  $u_n = \frac{n^n a^n}{n!}$  où  $a$  est un réel strictement positif donné.



### Indication exercice 2

---

**3** Séries de Bertrand .(Officiellement hors programme )

Nature de la série de terme général  $u_n$  défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$



### Indication exercice 3

---

**4**

1) Nature de la série de terme général  $u_n$  défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sum_{1 \leq k \leq n} k^{\frac{1}{k}}}$$

2) Nature de la série de terme général  $v_n$  défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n - \frac{1}{n}$$



### Indication exercice 4

---

**5** Soient  $a$  un réel strictement positif , on définit la suite réelle  $u$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{0 \leq p \leq n} \left( \frac{1}{3p+1} + \frac{1}{3p+2} \right)$$



- 1) Étudier la série de terme général  $\sum a^{u_n}$ .
- 2) Dans le cas de convergence, étudier la convergence de la série des restes  $r_n = \sum_{n+1 \leq k} u_k$ .



### Indication exercice 5

---

## Indications ou résultats

---

### 1 Indication exercice 1. [E]

Appliquer la règle de Cauchy , puis comparer avec une série de Riemann ,  $(n^\beta u_n)$  .



### Solution exercice 1

---

### 2 Indication exercice 2: Règle de Raabe-Duhamel . [E]

Utiliser par exemple la comparaison de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  avec  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  si  $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$  .



### Solution exercice 2

---

### 3 Indication exercice 3: Séries de Bertrand .( Hors programme officiel ). [E]

Preuve à savoir refaire à chaque fois car les séries de Bertrand ne sont pas au programme. Distinguer  $\alpha \neq 1$  et  $\alpha = 1$  , pour  $\alpha = 1$  , comparer avec une intégrale .



### Solution exercice 3

---

### 4 Indication exercice 4 . [E]

- 1) Le plus rapide consiste à obtenir un équivalent en utilisant les sommations des relations de comparaison.
- 2) On peut faire un développement asymptotique de  $k^{\frac{1}{k}}$  .



### Solution exercice 4

---

### 5 Indication exercice 5. [E]

- 1) Utiliser le développement asymptotique de  $\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k}$  à deux termes .
- 2) Utiliser les sommations des relations de comparaison.



### Solution exercice 5

---