

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

1. Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$, tels que $f \circ g = 0$. Montrer que $\text{rang } f + \text{rang } g \leq n$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe g dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = 0$ et $\text{rang } f + \text{rang } g = n$.
3. Soit f dans $\mathcal{L}(E)$, avec $f \neq 0$ et $\text{rang } f < n$.
Montrer qu'il existe g dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = 0$, $g \circ f \neq 0$ et $\text{rang } f + \text{rang } g = n$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

Soit u un endomorphisme de E , tel que $u^2 = 0$ (c'est-à-dire tel que $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$).

1. On suppose qu'il existe v dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u + u \circ v = \text{Id}$.
Montrer que la restriction de v à $\text{Ker } u$ est injective et que $\text{Ker } u = \text{Im } u$.
2. On suppose réciproquement que $\text{Ker } u = \text{Im } u$.
Soit F un supplémentaire de ce sous-espace dans E .
Montrer que pour tout x de E il existe un couple unique (y, z) de F^2 tel que $x = y + u(z)$.
3. Soit v l'application qui à x associe le vecteur z dans l'écriture précédente.
Montrer que v est un endomorphisme de E et que $v \circ u + u \circ v = \text{Id}$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f un endomorphisme de E .

1. Montrer l'équivalence : $\text{Im } f + \text{Ker } f = E \Leftrightarrow \text{Im } f = \text{Im } f^2$.
2. Montrer l'équivalence : $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
3. On suppose que E est de dimension finie.
Montrer : $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \Leftrightarrow \text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \Leftrightarrow E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f un endomorphisme de E (avec $\dim E = n < \infty$).

Montrer l'équivalence : $\text{Im } f = \text{Ker } f \Leftrightarrow (f^2 = 0, \quad n \text{ est pair et } \text{rang}(f) = \frac{n}{2})$.

Montrer qu'alors il existe une base de E de la forme $u_1, u_2, \dots, u_p, f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p)$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} .

Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \text{Id}$.

1. Montrer que $\text{Im}(f - \text{Id}) \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id})$ et $E = \text{Im}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id})$.
2. Soit x un vecteur non nul de $\text{Im}(f - \text{Id})$.
Montrer que $f(x)$ appartient à $\text{Im}(f - \text{Id})$ et que x et $f(x)$ sont libres.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Utiliser l'équivalence $f \circ g = 0 \Leftrightarrow \text{Im } g \subset \text{Ker } f$.
2. Considérer un supplémentaire H de $\text{Ker } f$, et la projection sur $\text{Ker } f$ parallèlement à H .
3. Justifier qu'il existe H comme précédemment, ne contenant pas $\text{Im } f$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. Prouver l'égalité $\text{Ker } u \cap \text{Ker } v = \{\vec{0}\}$, et l'inclusion $\text{Ker } u \subset \text{Im } u$.
2. Décomposer x de E en $x = y + u(t)$, avec $y \in F$ et $t \in E$.
Décomposer de même le vecteur t .
Pour l'unicité, si $x = y + u(z) = y' + u(z')$, prouver $y' = y$ et $z' - z \in \text{Ker } u$.
3. Combiner $x = y + u(z)$ et $x' = y' + u(z')$, pour écrire $\alpha x + \beta x'$.
Si $x = y + u(z)$, montrer que $y = v(u(x))$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Observer qu'on a toujours $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$ et $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$.

1. Si $E = \text{Im } f + \text{Ker } f$, se donner $v = f(u)$ et écrire $u = f(a) + b$, avec $a \in E$ et $b \in \text{Ker } f$.
Si $\text{Im } f \subset \text{Im } f^2$: pour tout u , montrer $\exists a \in E, f(u) = f^2(a)$.
2. Si $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{\vec{0}\}$, se donner $u \in \text{Ker } f^2$ et considérer $v = f(u)$.
Si $\text{Ker } f^2 \subset \text{Ker } f$, se donner $u = f(v) \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$. Constater que v est dans $\text{Ker } f$.
3. Appliquer les deux questions précédentes simultanément.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

- Si $\text{Im } f = \text{Ker } f$, appliquer le théorème de la dimension.
- Réciproquement, noter que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$, puis que $\text{Im } f = \text{Ker } f$.
- Si v_1, \dots, v_p est une base de $\text{Im } f$, considérer des u_k tels que $v_k = f(u_k)$.
Montrer que $u_1, \dots, u_p, f(u_1), \dots, f(u_p)$ forment une base de E .

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. Si $u \in \text{Im } (f - \text{Id})$. L'écrire $u = f(v) - v$. Vérifier que $(f^2 + f + \text{Id})(u) = \vec{0}$.
Montrer qu'il suffit de prouver que la somme $\text{Im } (f - \text{Id}) + \text{Ker } (f - \text{Id})$ est directe.
2. Soit $x = (f - \text{Id})(y) \neq \vec{0}$ dans $\text{Im } (f - \text{Id})$. Montrer que $f(x) = (f - \text{Id})(f(y))$.
L'égalité $f(x) = \lambda x$ donnerait $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$