

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

1. Soient  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{L}(E)$ , tels que  $f \circ g = 0$ . Montrer que  $\text{rang } f + \text{rang } g \leq n$ .
2. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer qu'il existe  $g$  dans  $\mathcal{L}(E)$  tel que  $f \circ g = 0$  et  $\text{rang } f + \text{rang } g = n$ .
3. Soit  $f$  dans  $\mathcal{L}(E)$ , avec  $f \neq 0$  et  $\text{rang } f < n$ .  
Montrer qu'il existe  $g$  dans  $\mathcal{L}(E)$  tel que  $f \circ g = 0$ ,  $g \circ f \neq 0$  et  $\text{rang } f + \text{rang } g = n$ .

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ , tel que  $u^2 = 0$  (c'est-à-dire tel que  $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ ).

1. On suppose qu'il existe  $v$  dans  $\mathcal{L}(E)$  tel que  $v \circ u + u \circ v = \text{Id}$ .  
Montrer que la restriction de  $v$  à  $\text{Ker } u$  est injective et que  $\text{Ker } u = \text{Im } u$ .
2. On suppose réciproquement que  $\text{Ker } u = \text{Im } u$ .  
Soit  $F$  un supplémentaire de ce sous-espace dans  $E$ .  
Montrer que pour tout  $x$  de  $E$  il existe un couple unique  $(y, z)$  de  $F^2$  tel que  $x = y + u(z)$ .
3. Soit  $v$  l'application qui à  $x$  associe le vecteur  $z$  dans l'écriture précédente.  
Montrer que  $v$  est un endomorphisme de  $E$  et que  $v \circ u + u \circ v = \text{Id}$ .

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Montrer l'équivalence :  $\text{Im } f + \text{Ker } f = E \Leftrightarrow \text{Im } f = \text{Im } f^2$ .
2. Montrer l'équivalence :  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ .
3. On suppose que  $E$  est de dimension finie.  
Montrer :  $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \Leftrightarrow \text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \Leftrightarrow E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$ .

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  (avec  $\dim E = n < \infty$ ).

Montrer l'équivalence :  $\text{Im } f = \text{Ker } f \Leftrightarrow (f^2 = 0, \quad n \text{ est pair et } \text{rang}(f) = \frac{n}{2})$ .

Montrer qu'alors il existe une base de  $E$  de la forme  $u_1, u_2, \dots, u_p, f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p)$ .

**EXERCICE 5** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^3 = \text{Id}$ .

1. Montrer que  $\text{Im}(f - \text{Id}) \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id})$  et  $E = \text{Im}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id})$ .
2. Soit  $x$  un vecteur non nul de  $\text{Im}(f - \text{Id})$ .  
Montrer que  $f(x)$  appartient à  $\text{Im}(f - \text{Id})$  et que  $x$  et  $f(x)$  sont libres.

## Indications ou résultats

### INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Utiliser l'équivalence  $f \circ g = 0 \Leftrightarrow \text{Im } g \subset \text{Ker } f$ .
2. Considérer un supplémentaire  $H$  de  $\text{Ker } f$ , et la projection sur  $\text{Ker } f$  parallèlement à  $H$ .
3. Justifier qu'il existe  $H$  comme précédemment, ne contenant pas  $\text{Im } f$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. Prouver l'égalité  $\text{Ker } u \cap \text{Ker } v = \{\vec{0}\}$ , et l'inclusion  $\text{Ker } u \subset \text{Im } u$ .
2. Décomposer  $x$  de  $E$  en  $x = y + u(t)$ , avec  $y \in F$  et  $t \in E$ .  
Décomposer de même le vecteur  $t$ .  
Pour l'unicité, si  $x = y + u(z) = y' + u(z')$ , prouver  $y' = y$  et  $z' - z \in \text{Ker } u$ .
3. Combiner  $x = y + u(z)$  et  $x' = y' + u(z')$ , pour écrire  $\alpha x + \beta x'$ .  
Si  $x = y + u(z)$ , montrer que  $y = v(u(x))$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Observer qu'on a toujours  $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$  et  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$ .

1. Si  $E = \text{Im } f + \text{Ker } f$ , se donner  $v = f(u)$  et écrire  $u = f(a) + b$ , avec  $a \in E$  et  $b \in \text{Ker } f$ .  
Si  $\text{Im } f \subset \text{Im } f^2$  : pour tout  $u$ , montrer  $\exists a \in E, f(u) = f^2(a)$ .
2. Si  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{\vec{0}\}$ , se donner  $u \in \text{Ker } f^2$  et considérer  $v = f(u)$ .  
Si  $\text{Ker } f^2 \subset \text{Ker } f$ , se donner  $u = f(v) \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$ . Constater que  $v$  est dans  $\text{Ker } f$ .
3. Appliquer les deux questions précédentes simultanément.

### INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

- Si  $\text{Im } f = \text{Ker } f$ , appliquer le théorème de la dimension.
- Réciproquement, noter que  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ , puis que  $\text{Im } f = \text{Ker } f$ .
- Si  $v_1, \dots, v_p$  est une base de  $\text{Im } f$ , considérer des  $u_k$  tels que  $v_k = f(u_k)$ .  
Montrer que  $u_1, \dots, u_p, f(u_1), \dots, f(u_p)$  forment une base de  $E$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. Si  $u \in \text{Im } (f - \text{Id})$ . L'écrire  $u = f(v) - v$ . Vérifier que  $(f^2 + f + \text{Id})(u) = \vec{0}$ .  
Montrer qu'il suffit de prouver que la somme  $\text{Im } (f - \text{Id}) + \text{Ker } (f - \text{Id})$  est directe.
2. Soit  $x = (f - \text{Id})(y) \neq \vec{0}$  dans  $\text{Im } (f - \text{Id})$ . Montrer que  $f(x) = (f - \text{Id})(f(y))$ .  
L'égalité  $f(x) = \lambda x$  donnerait  $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$