

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, E étant de dimension finie.

Montrer que $\dim(\text{Im } f \cap \text{Ker } g) = \dim \text{Im } f - \dim \text{Im } (g \circ f)$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient f et g deux endomorphismes de E (de dimension finie).

On suppose que $E = \text{Im } f + \text{Im } g = \text{Ker } f + \text{Ker } g$.

Montrer que ces deux sommes sont directes.

Montrer que ce résultat n'est plus valable si on ne suppose pas $\dim E < \infty$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .

Soit f un endomorphisme de E .

1. On suppose que pour tout u de E , il existe un entier m tel que $f^m(u) = \vec{0}$.

Montrer qu'il existe un entier p tel que pour tout u de E , $f^p(u) = \vec{0}$.

2. Montrer que ce résultat est faux si on ne suppose plus que E est de dimension finie.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, E étant de dimension finie.

Soient f et g deux applications linéaires de E dans F .

1. Comparer $\text{Im } (f + g)$ et $\text{Im } f + \text{Im } g$.

En déduire que $\text{rang } (f + g) \leq \text{rang } (f) + \text{rang } (g)$.

2. Montrer l'équivalence : $\text{rang } (f + g) = \text{rang } (f) + \text{rang } (g) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Im } f \cap \text{Im } g = \{\vec{0}\} \\ E = \text{Ker } f + \text{Ker } g \end{cases}$

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$, tels que $f \circ g = 0$ et $f + g \in \text{GL}(E)$.

Montrer que $\text{rang } f + \text{rang } g = \dim E$.

EXERCICE 6 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, E et F étant de dimension finie.

Soit f dans $\mathcal{L}(E, F)$ et g dans $\mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\dim \text{Ker } g \circ f \leq \dim \text{Ker } g + \dim \text{Ker } f$.

2. Montrer que $\text{rang } f + \text{rang } g - \dim F \leq \text{rang } g \circ f \leq \inf(\text{rang } f, \text{rang } g)$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Appliquer le théorème de la dimension à la restriction h de g à $\text{Im } f$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. Appliquer le théorème de la dimension à f et à g , conjointement avec les hypothèses.
2. Se placer dans $E = \mathbb{K}[X]$, et considérer $f : P \mapsto P''$ et $g : P \mapsto P(0)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Si e_1, \dots, e_n est une base de E , il existe des entiers m_j tel que $f^{m_j}(e_j) = \vec{0}$.
Considérer alors $p = \max \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$.
2. Se placer dans $E = \mathbb{K}[X]$ et considérer l'application $f : P \mapsto P'$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. Vérifier l'inclusion $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$. En déduire $\text{rang}(f + g) \leq \text{rang } f + \text{rang } g$.
2. Si $\text{rang}(f + g) = \text{rang } f + \text{rang } g$, montrer que $\begin{cases} \text{Im}(f + g) = \text{Im } f + \text{Im } g \\ \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 0 \end{cases}$
Si $x \in E$, montrer qu'il existe $y \in E$ tel que $f(x - y) = g(y)$.
Interpréter alors l'égalité $x = (x - y) + y$.
Réciproquement supposer $\text{Im } f \cap \text{Im } g = \{\vec{0}\}$ et $E = \text{Ker } f + \text{Ker } g$.
Se donner $y = f(x) \in \text{Im } f$ et $y' = g(x') \in \text{Im } g$.
Décomposer x et x' , et en déduire que $y + y'$ est élément de $\text{Im}(f + g)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $f \circ g = 0 \Leftrightarrow \text{Im } g \subset \text{Ker } f$, et $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$.
En déduire $\dim E \leq \dim \text{Im } f + \dim \text{Im } g$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

1. Appliquer le théorème de la dimension à la restriction h de f à $H = \text{Ker } g \circ f$.
Vérifier que $\text{Im } h \subset \text{Ker } g$. En déduire $\dim \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim \text{Ker } f + \dim \text{Ker } g$.
2. Appliquer le théorème de la dimension à f et g .
En déduire $\text{rang } f + \text{rang } g - \dim F \leq \text{rang}(g \circ f)$.
Appliquer le théorème de la dimension à la restriction h de g à $\text{Im } f$.