Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, E étant de dimension finie.
Montrer que $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) = \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im}(g \circ f)$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soient f et g deux endomorphismes de E (de dimension finie).
On suppose que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$.
Montrer que ces deux sommes sont directes.
Montrer que ce résultat n'est plus valable si on ne suppose pas $\dim E < \infty$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit f un endomorphisme de E.

1. On suppose que pour tout u de E, il existe un entier m tel que $f^m(u) = \overrightarrow{0}$.
   Montrer qu'il existe un entier p tel que pour tout u de E, $f^p(u) = \overrightarrow{0}$.
2. Montrer que ce résultat est faux si on ne suppose plus que E est de dimension finie.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie.
Soient f et g deux applications linéaires de E dans F.

1. Comparer $\operatorname{Im}(f+g)$ et $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
   En déduire que $\operatorname{rang}(f+g) \le \operatorname{rang}(f) + \operatorname{rang}(g)$.
2. Montrer l'équivalence : $\operatorname{rang}(f+g) = \operatorname{rang}(f) + \operatorname{rang}(g) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\overrightarrow{0}\} \\ E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g \end{cases}$

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$, tels que $f \circ g = 0$ et $f + g \in \mathrm{GL}(E)$.
Montrer que $\operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g = \dim E$.

EXERCICE 6 [Indication] [Correction]

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, E et F étant de dimension finie.
Soit f dans $\mathcal{L}(E, F)$ et g dans $\mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\dim \operatorname{Ker} g \circ f \le \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Ker} f$.
2. Montrer que $\operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g - \dim F \le \operatorname{rang} g \circ f \le \inf(\operatorname{rang} f, \operatorname{rang} g)$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Appliquer le théorème de la dimension à la restriction h de g à $\operatorname{Im} f$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. Appliquer le théorème de la dimension à f et à g, conjointement avec les hypothèses.
2. Se placer dans $E = \mathbb{K}[X]$, et considérer $f : P \mapsto P''$ et $g : P \mapsto P(0)$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Si $e_1, \ldots, e_n$ est une base de E, il existe des entiers m_j tel que $f^{m_j}(e_j) = \overrightarrow{0}$.
   Considérer alors $p = \max\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$.
2. Se placer dans $E = \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et considérer l'application $f : P \mapsto P'$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

1. Vérifier l'inclusion $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. En déduire $\operatorname{rang}(f+g) \leq \operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g$.
2. Si $\operatorname{rang}(f+g) = \operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g$, montrer que $\begin{cases} \operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g \\ \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) = 0 \end{cases}$
   Si $x \in E$, montrer qu'il existe $y \in E$ tel que $f(x-y) = g(y)$.
   Interpréter alors l'égalité $x = (x-y) + y$.
   Réciproquement supposer $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\overrightarrow{0}\}$ et $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$.
   Se donner $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$ et $y' = g(x') \in \operatorname{Im} g$.
   Décomposer x et x', et en déduire que $y + y'$ est élément de $\operatorname{Im}(f+g)$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $f \circ g = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$, et $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
En déduire $\dim E \leq \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

1. Appliquer le théorème de la dimension à la restriction h de f à $H = \operatorname{Ker} g \circ f$.
   Vérifier que $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{Ker} g$. En déduire $\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leq \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$.
2. Appliquer le théorème de la dimension à f et g.
   En déduire $\operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g - \dim F \leq \operatorname{rang}(g \circ f)$.
   Appliquer le théorème de la dimension à la restriction h de g à $\operatorname{Im} f$.