

## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

On définit les trois sous-espaces suivants de  $E = \mathbb{K}_3[X]$  :

$$\begin{cases} F = \{P \in E, P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \\ G = \{P \in E, P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \\ H = \{P \in E, P(X) = P(-X)\} \end{cases}$$

- Montrer que  $F \oplus G = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$ .
- Montrer que  $E = F \oplus G \oplus H$ .

### EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$ , tels que  $\dim(F) = \dim(G) = r$ .

Montrer qu'il existe un sous-espace  $H$  de  $E$  tel que  $E = F \oplus H = G \oplus H$ .

Indication : utiliser une récurrence descendante sur l'entier  $r$ .

### EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Dans  $\mathbb{R}^4$ , déterminer la dimension du sous-espace vectoriel engendré par :

$$a = (1, 2, 2, 1), b = (4, 3, 10, 5), c = (-1, -3, 4, 0), d = (0, 4, -3, -1).$$

### EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient  $F_1, F_2, \dots, F_n$  des sous-espaces de  $E$ . Rappeler l'équivalence :

$$\sum_{j=1}^n F_j \text{ est directe} \Leftrightarrow \dim \sum_{j=1}^n F_j = \sum_{j=1}^n \dim F_j.$$

2. Soient  $p_1, \dots, p_n$  des projecteurs de  $E$ , tels que  $\sum_{j=1}^n p_j = \text{Id}_E$ .

Montrer que  $E = \text{Im } p_1 \oplus \text{Im } p_2 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_n$ .

3. Prouver que pour tous indices distincts  $i$  et  $j$ , on a :  $p_i \circ p_j = 0$ .

### EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Montrer que l'application  $\varphi$  définie par  $\varphi(P) = P + P'$  est un automorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ .

En est-il de même avec l'application  $P \mapsto \psi_\lambda(P) = \lambda P - XP'$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$  ?

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Si  $P \in F \cap G$ , il s'annule en 0, 1, 2, 3 alors qu'il est de degré inférieur ou égal à 3...

Vérifier que  $H = \{P = a + bX^2, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ , et que  $H \cap (F \oplus G) = \{\vec{0}\}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Dans le passage du rang  $r + 1$  au rang  $r$ , choisir  $x$  n'appartenant pas à  $F \cup G$ .

Considérer  $F' = F \oplus \mathbb{K}x$  et  $G' = G \oplus \mathbb{K}x$ , tous deux de dimension  $r + 1$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

La famille  $a, b, c, d$  est liée, mais  $a, b, d$  sont linéairement indépendants.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. Considérer  $\varphi : F_1 \times \cdots \times F_n \rightarrow F_1 + \cdots + F_n$  définie par :  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$ .

2. Pour tout  $x$  de  $E$ , on a  $x = p_1(x) + \cdots + p_n(x)$ .

Utiliser le fait que la trace d'une projection vectorielle est égale à son rang.

3. Utiliser l'égalité  $y = \sum_{i=1}^n p_i(y) = p_j(y) + \sum_{i \neq j} p_i(y)$  avec  $y = p_j(x)$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. Montrer d'abord  $\varphi$  est un endomorphisme injectif de  $\mathbb{K}[X]$ .

Considérer ensuite la restriction de  $\varphi$  à  $\mathbb{K}_n[X]$ , pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

2. Vérifier que si  $\lambda \notin \mathbb{N}$ , alors on a toujours  $\deg \psi_\lambda(P) = \deg P$ .

Si  $\lambda = n \in \mathbb{N}$ , montrer qu'aucun polynôme de degré  $n$  n'est dans l'image de  $\psi_n$ .