Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

On définit les trois sous-espaces suivants de $E = \mathbb{K}_3[X]$:

$$\begin{cases} F = \{P \in E, P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \\ G = \{P \in E, P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \\ H = \{P \in E, P(X) = P(-X)\} \end{cases}$$

– Montrer que $F \oplus G = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$.

– Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Soient F et G deux sous-espaces de E, tels que $\dim(F) = \dim(G) = r$.

Montrer qu'il existe un sous-espace H de E tel que $E = F \oplus H = G \oplus H$.

Indication : utiliser une récurrence descendante sur l'entier r.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer la dimension du sous-espace vectoriel engendré par :

$a = (1, 2, 2, 1)$, $b = (4, 3, 10, 5)$, $c = (-1, -3, 4, 0)$, $d = (0, 4, -3, -1)$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous-espaces de E. Rappeler l'équivalence :
   $\sum_{j=1}^{n} F_j$ est directe $\Leftrightarrow \dim \sum_{j=1}^{n} F_j = \sum_{j=1}^{n} \dim F_j$.
2. Soient $p_1, \ldots, p_n$ des projecteurs de E, tels que $\sum_{j=1}^{n} p_j = \mathrm{Id}_E$.
   Montrer que $E = \mathrm{Im}\, p_1 \oplus \mathrm{Im}\, p_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\, p_n$.
3. Prouver que pour tous indices distincts i et j, on a : $p_i \circ p_j = 0$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Montrer que l'application φ définie par $\varphi(P) = P + P'$ est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

En est-il de même avec l'application $P \mapsto \psi_\lambda(P) = \lambda P - XP'$, où $\lambda \in \mathbb{R}$?

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Si $P \in F \cap G$, il s'annule en $0, 1, 2, 3$ alors qu'il est de degré inférieur ou égal à $3 \ldots$.

Vérifier que $H = \{P = a + bX^2, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, et que $H \cap (F \oplus G) = \{\overrightarrow{0}\}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Dans le passage du rang $r + 1$ au rang r, choisir x n'appartenant pas à $F \cup G$.

Considérer $F' = F \oplus \mathbb{K}x$ et $G' = G \oplus \mathbb{K}x$, tous deux de dimension $r + 1$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

La famille a, b, c, d est liée, mais a, b, d sont linéairement indépendants.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. Considérer $\varphi : F_1 \times \cdots \times F_n \to F_1 + \cdots + F_n$ définie par : $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$.
2. Pour tout x de E, on a $x = p_1(x) + \cdots + p_n(x)$.
   Utiliser le fait que la trace d'une projection vectorielle est égale à son rang.
3. Utiliser l'égalité $y = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(y) = p_j(y) + \sum\limits_{i \neq j} p_i(y)$ avec $y = p_j(x)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. Montrer d'abord φ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{K}[X]$.
   Considérer ensuite la restriction de φ à $\mathbb{K}_n[X]$, pour n dans $\mathbb{N}$.
2. Vérifier que si $\lambda \notin \mathbb{N}$, alors on a toujours $\deg \psi_\lambda(P) = \deg P$.
   Si $\lambda = n \in \mathbb{N}$, montrer qu'aucun polynôme de degré n n'est dans l'image de ψ_n.