

## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Dans  $\mathbb{K}[X]$ , on se donne une suite de polynômes non nuls  $(P_n)_{n \geq 0}$ .

On suppose que pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $\deg P_n < \deg P_{n+1}$ .

1. Montrer que la famille  $(P_n)_{n \geq 0}$  est libre.
2. Montrer que c'est une base de  $\mathbb{K}[X]$  si et seulement si, pour tout  $n$ ,  $\deg P_n = n$ .

### EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ .

Soit  $x$  un vecteur de  $E$  tel que  $f^{n-1}(x) \neq 0$ .

Montrer que la famille  $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$  constitue une base de  $E$ .

### EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Dans  $\mathbb{R}^4$ , Soit  $E$  l'ensemble des  $u = (x, y, z, t)$  tels que 
$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 5t = 0 \\ x + 2y + z - t = 0 \end{cases}$$

Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel ; en donner la dimension et une base.

### EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

On se donne une subdivision  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  du segment  $[a, b]$ .

Soit  $F$  l'ensemble des applications  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont affines sur chaque  $[x_k, x_{k+1}]$ .

Montrer que  $F$  est un espace vectoriel. En donner la dimension et une base.