Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel, et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = -\mathrm{Id}$.
Soient $V = \{x \in E, f(x) = ix\}$ et $W = \{x \in E, f(x) = -ix\}$.
Montrer que V et W sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soit f un endomorphisme de E, et deux scalaires distincts α et β.
Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f^2 - (\alpha + \beta)f + \alpha\beta\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\,(f - \alpha\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - \beta\mathrm{Id})$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soit f un endomorphisme de E. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f \Leftrightarrow$ la restriction de f à $\mathrm{Im}\, f$ est un automorphisme de $\mathrm{Im}\, f$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel, et soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \mathrm{Id}$.
Montrer que $E = E_1 \oplus E_j \oplus E_{j^2}$, avec la notation $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{Id})$.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soit f un endomorphisme de E, et P, Q deux polynômes premiers entre eux.
Montrer que $\mathrm{Ker}\,(PQ)(f) = \mathrm{Ker}\, P(f) \oplus \mathrm{Ker}\, Q(f)$.

EXERCICE 6 [Indication] [Correction]

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$.
2. Montrer que $f(\mathrm{Im}\, g) = \mathrm{Im}\, f$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Supposer que $u \in E$ s'écrit $u = v + w$, avec $v \in V$ et $w \in W$.

Montrer que $v = \frac{1}{2}(u - if(u))$ et que $w = \frac{1}{2}(u + if(u))$.

Réciproquement, vérifier que ces deux vecteurs conviennent.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id})$ et $\operatorname{Ker}(f - \beta \mathrm{Id})$ sont en somme directe.

Noter que $g = f^2 - (\alpha + \beta)f + \alpha\beta \mathrm{Id} = (f - \alpha \mathrm{Id}) \circ (f - \beta \mathrm{Id}) = (f - \beta \mathrm{Id}) \circ (f - \alpha \mathrm{Id})$.

En déduire $\operatorname{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - \beta \mathrm{Id}) \subset \operatorname{Ker} g$.

Vérifier enfin que tout u de E peut s'écrire $u = \dfrac{1}{\beta - \alpha}(v - w)$, avec $\begin{cases} v = (f - \alpha \mathrm{Id})(u) \\ w = (f - \beta \mathrm{Id})(u) \end{cases}$

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

- Si $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$, soit g la restriction de f à $\operatorname{Im} f$.
  Montrer que g est un endomorphisme surjectif de $\operatorname{Im} f$. Si $v \in \operatorname{Ker} g$, noter que $f(v) = \overrightarrow{0}$.
- Réciproquement supposer que la restriction g de f à $\operatorname{Im} f$ est un automorphisme de $\operatorname{Im} f$.
  Si $u \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, utiliser l'injectivité de g pour montrer que $u = \overrightarrow{0}$.
  Si $u \in E$, utiliser la surjectivité de g pour montrer qu'il existe v dans $\operatorname{Im} f$ tel que $f(u) = g(v)$.
  En déduire que $w = u - v$ est dans $\operatorname{Ker} f$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Si $f^3 = \mathrm{Id}$, supposer que $u \in E$ s'écrit $u = u_1 + u_j + u_{j^2}$ avec $u_1 \in E_1, u_j \in E_j, u_{j^2} \in E_{j^2}$.

Prouver $u_1 = \frac{1}{3}(u + f(u) + f^2(u))$, $u_j = \frac{1}{3}(u + j^2 f(u) + j f^2(u))$, $u_{j^2} = \frac{1}{3}(u + j f(u) + j^2 f^2(u))$.

Réciproquement, vérifier que les trois vecteurs u_1, u_j, u_{j^2} conviennent.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Si $P \wedge Q = 1$, Montrer qu'il existe A, B tels que $\mathrm{Id} = (AP)(f) + (BQ)(f)$.

Si $u \in \operatorname{Ker}(PQ)(f)$, alors $u = v + w$, avec $v = (AP)(f)(u)$ et $w = (BQ)(f)(u)$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

1. Si $x = y + z$, avec $y \in \operatorname{Ker} f$ et $z \in \operatorname{Im} g$, montrer que $z = g \circ f(x)$ et $y = x - z = x - g \circ f(x)$.
   Réciproquement vérifier que ces deux vecteurs y, z conviennent.
2. Se donner $x' = f(x)$ dans $\operatorname{Im} f$. Écrire $x = y + z$, avec $y \in \operatorname{Ker} f$ et $z \in \operatorname{Im} g$.