

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel, et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = -\text{Id}$.

Soient $V = \{x \in E, f(x) = ix\}$ et $W = \{x \in E, f(x) = -ix\}$.

Montrer que V et W sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f un endomorphisme de E , et deux scalaires distincts α et β .

Montrer que $\text{Ker}(f^2 - (\alpha + \beta)f + \alpha\beta\text{Id}) = \text{Ker}(f - \alpha\text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \beta\text{Id})$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f un endomorphisme de E . Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f \Leftrightarrow$ la restriction de f à $\text{Im } f$ est un automorphisme de $\text{Im } f$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel, et soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \text{Id}$.

Montrer que $E = E_1 \oplus E_j \oplus E_{j^2}$, avec la notation $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda\text{Id})$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f un endomorphisme de E , et P, Q deux polynômes premiers entre eux.

Montrer que $\text{Ker}(PQ)(f) = \text{Ker } P(f) \oplus \text{Ker } Q(f)$.

EXERCICE 6 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1. Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } g$.
2. Montrer que $f(\text{Im } g) = \text{Im } f$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Supposer que $u \in E$ s'écrit $u = v + w$, avec $v \in V$ et $w \in W$.

Montrer que $v = \frac{1}{2}(u - if(u))$ et que $w = \frac{1}{2}(u + if(u))$.

Réciproquement, vérifier que ces deux vecteurs conviennent.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $\text{Ker}(f - \alpha\text{Id})$ et $\text{Ker}(f - \beta\text{Id})$ sont en somme directe.

Noter que $g = f^2 - (\alpha + \beta)f + \alpha\beta\text{Id} = (f - \alpha\text{Id}) \circ (f - \beta\text{Id}) = (f - \beta\text{Id}) \circ (f - \alpha\text{Id})$.

En déduire $\text{Ker}(f - \alpha\text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \beta\text{Id}) \subset \text{Ker } g$.

Vérifier enfin que tout u de E peut s'écrire $u = \frac{1}{\beta - \alpha}(v - w)$, avec $\begin{cases} v = (f - \alpha\text{Id})(u) \\ w = (f - \beta\text{Id})(u) \end{cases}$

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

– Si $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$, soit g la restriction de f à $\text{Im } f$.

Montrer que g est un endomorphisme surjectif de $\text{Im } f$. Si $v \in \text{Ker } g$, noter que $f(v) = \vec{0}$.

– Réciproquement supposer que la restriction g de f à $\text{Im } f$ est un automorphisme de $\text{Im } f$.

Si $u \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$, utiliser l'injectivité de g pour montrer que $u = \vec{0}$.

Si $u \in E$, utiliser la surjectivité de g pour montrer qu'il existe v dans $\text{Im } f$ tel que $f(u) = g(v)$.

En déduire que $w = u - v$ est dans $\text{Ker } f$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Si $f^3 = \text{Id}$, supposer que $u \in E$ s'écrit $u = u_1 + u_j + u_{j^2}$ avec $u_1 \in E_1, u_j \in E_j, u_{j^2} \in E_{j^2}$.

Prouver $u_1 = \frac{1}{3}(u + f(u) + f^2(u))$, $u_j = \frac{1}{3}(u + j^2f(u) + jf^2(u))$, $u_{j^2} = \frac{1}{3}(u + jf(u) + j^2f^2(u))$.

Réciproquement, vérifier que les trois vecteurs u_1, u_j, u_{j^2} conviennent.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Si $P \wedge Q = 1$, Montrer qu'il existe A, B tels que $\text{Id} = (AP)(f) + (BQ)(f)$.

Si $u \in \text{Ker}(PQ)(f)$, alors $u = v + w$, avec $v = (AP)(f)(u)$ et $w = (BQ)(f)(u)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

1. Si $x = y + z$, avec $y \in \text{Ker } f$ et $z \in \text{Im } g$, montrer que $z = g \circ f(x)$ et $y = x - z = x - g \circ f(x)$.

Réciproquement vérifier que ces deux vecteurs y, z conviennent.

2. Se donner $x' = f(x)$ dans $\text{Im } f$. Écrire $x = y + z$, avec $y \in \text{Ker } f$ et $z \in \text{Im } g$.