

## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f \circ f = -\text{Id}$ .

Soient  $V = \{x \in E, f(x) = ix\}$  et  $W = \{x \in E, f(x) = -ix\}$ .

Montrer que  $V$  et  $W$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ .

### EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ , et deux scalaires distincts  $\alpha$  et  $\beta$ .

Montrer que  $\text{Ker}(f^2 - (\alpha + \beta)f + \alpha\beta\text{Id}) = \text{Ker}(f - \alpha\text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \beta\text{Id})$ .

### EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f \Leftrightarrow$  la restriction de  $f$  à  $\text{Im } f$  est un automorphisme de  $\text{Im } f$ .

### EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, et soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^3 = \text{Id}$ .

Montrer que  $E = E_1 \oplus E_j \oplus E_{j^2}$ , avec la notation  $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda\text{Id})$ .

### EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ , et  $P, Q$  deux polynômes premiers entre eux.

Montrer que  $\text{Ker}(PQ)(f) = \text{Ker } P(f) \oplus \text{Ker } Q(f)$ .

### EXERCICE 6 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $f \circ g \circ f = f$  et  $g \circ f \circ g = g$ .

1. Montrer que  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } g$ .
2. Montrer que  $f(\text{Im } g) = \text{Im } f$ .

## Indications ou résultats

### INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Supposer que  $u \in E$  s'écrit  $u = v + w$ , avec  $v \in V$  et  $w \in W$ .

Montrer que  $v = \frac{1}{2}(u - if(u))$  et que  $w = \frac{1}{2}(u + if(u))$ .

Réciproquement, vérifier que ces deux vecteurs conviennent.

### INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Montrer que  $\text{Ker}(f - \alpha\text{Id})$  et  $\text{Ker}(f - \beta\text{Id})$  sont en somme directe.

Noter que  $g = f^2 - (\alpha + \beta)f + \alpha\beta\text{Id} = (f - \alpha\text{Id}) \circ (f - \beta\text{Id}) = (f - \beta\text{Id}) \circ (f - \alpha\text{Id})$ .

En déduire  $\text{Ker}(f - \alpha\text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \beta\text{Id}) \subset \text{Ker } g$ .

Vérifier enfin que tout  $u$  de  $E$  peut s'écrire  $u = \frac{1}{\beta - \alpha}(v - w)$ , avec  $\begin{cases} v = (f - \alpha\text{Id})(u) \\ w = (f - \beta\text{Id})(u) \end{cases}$

### INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

– Si  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ , soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $\text{Im } f$ .

Montrer que  $g$  est un endomorphisme surjectif de  $\text{Im } f$ . Si  $v \in \text{Ker } g$ , noter que  $f(v) = \vec{0}$ .

– Réciproquement supposer que la restriction  $g$  de  $f$  à  $\text{Im } f$  est un automorphisme de  $\text{Im } f$ .

Si  $u \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$ , utiliser l'injectivité de  $g$  pour montrer que  $u = \vec{0}$ .

Si  $u \in E$ , utiliser la surjectivité de  $g$  pour montrer qu'il existe  $v$  dans  $\text{Im } f$  tel que  $f(u) = g(v)$ .

En déduire que  $w = u - v$  est dans  $\text{Ker } f$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Si  $f^3 = \text{Id}$ , supposer que  $u \in E$  s'écrit  $u = u_1 + u_j + u_{j^2}$  avec  $u_1 \in E_1, u_j \in E_j, u_{j^2} \in E_{j^2}$ .

Prouver  $u_1 = \frac{1}{3}(u + f(u) + f^2(u))$ ,  $u_j = \frac{1}{3}(u + j^2f(u) + jf^2(u))$ ,  $u_{j^2} = \frac{1}{3}(u + jf(u) + j^2f^2(u))$ .

Réciproquement, vérifier que les trois vecteurs  $u_1, u_j, u_{j^2}$  conviennent.

### INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Si  $P \wedge Q = 1$ , Montrer qu'il existe  $A, B$  tels que  $\text{Id} = (AP)(f) + (BQ)(f)$ .

Si  $u \in \text{Ker}(PQ)(f)$ , alors  $u = v + w$ , avec  $v = (AP)(f)(u)$  et  $w = (BQ)(f)(u)$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

1. Si  $x = y + z$ , avec  $y \in \text{Ker } f$  et  $z \in \text{Im } g$ , montrer que  $z = g \circ f(x)$  et  $y = x - z = x - g \circ f(x)$ .

Réciproquement vérifier que ces deux vecteurs  $y, z$  conviennent.

2. Se donner  $x' = f(x)$  dans  $\text{Im } f$ . Écrire  $x = y + z$ , avec  $y \in \text{Ker } f$  et  $z \in \text{Im } g$ .