



## Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$ .

Montrer que si  $f$  et  $g$  commutent, alors  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont stables par  $g$ .

Prouver que si  $f$  est un projecteur alors la réciproque est vraie.

EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$ .

Montrer que  $p + q$  est un projecteur de  $E \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0$ .

EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$ .

Montrer que  $p$  et  $q$  ont même noyau  $\Leftrightarrow p = p \circ q$  et  $q = q \circ p$ .

EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $p$  un projecteur non nul de  $E$ .

Montrer que l'application  $f_\lambda = \text{Id} + \lambda p$  est injective  $\Leftrightarrow \lambda \neq -1$ .

EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

Déterminer les couples  $(f, g)$  d'endomorphismes de  $E$  tels que : 
$$\begin{cases} f \circ g = f \\ g \circ f = g \end{cases}$$