

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit f un endomorphisme de E , commutant avec tous les endomorphismes de E .
Montrer que f est de la forme λId , avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, et g une application linéaire de F dans G .
On définit φ de $\mathcal{L}(E, F)$ vers $\mathcal{L}(E, G)$ en posant $\varphi(f) = g \circ f$.
Montrer que φ est une application linéaire.
On suppose que g est injective. Que peut-on dire de φ ?

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur \mathbb{K} , $f \in \mathcal{L}(E, G)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Im } g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(E, F)$, tel que $f = g \circ h$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur \mathbb{K} , $f \in \mathcal{L}(E, G)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(F, G)$, tel que $f = h \circ g$.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soient E, F, G trois espaces vectoriels. Soit f dans $\mathcal{L}(E, F)$ et g dans $\mathcal{L}(F, G)$.
On dit que f, g forment une *suite exacte* si $\text{Im } f = \text{Ker } g$.
On se donne les espaces vectoriels E_k et F_k , avec $k \in \{1, \dots, 5\}$.
On se donne les applications linéaires $f_k : E_k \rightarrow E_{k+1}$, $g_k : E_k \rightarrow E_{k+1}$, $h_k : E_k \rightarrow F_k$.
On suppose que les suites f_k, f_{k+1} et g_k, g_{k+1} sont exactes.
On suppose qu'on a les égalités $h_{k+1} \circ f_k = g_k \circ h_k$.
La situation est résumée dans le schéma ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & f_1 & & f_2 & & f_3 & & f_4 & & \\
 E_1 & \rightarrow & E_2 & \rightarrow & E_3 & \rightarrow & E_4 & \rightarrow & E_5 & \\
 \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_5 & \\
 F_1 & \rightarrow & F_2 & \rightarrow & F_3 & \rightarrow & F_4 & \rightarrow & F_5 & \\
 & g_1 & & g_2 & & g_3 & & g_4 & &
 \end{array}$$

1. Montrer que si h_2, h_4 sont injectives et h_1 est surjective alors h_3 est injective.
2. Montrer que si h_2, h_4 sont surjectives et h_5 est injective, alors h_3 est surjective.

EXERCICE 6 [Indication] [Correction]

Soit f une application linéaire de E dans F . Montrer que si u est injective alors pour tous sous-espaces vectoriels F et G en somme directe, $f(F)$ et $f(G)$ sont en somme directe.
Est-ce que la réciproque est vraie?

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Se donner f dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$, pour tout g de $\mathcal{L}(E)$.

Considérer $u \neq \vec{0}$ dans E , et un supplémentaire H de $\mathbb{K}u$ dans E .

Utiliser la projection vectorielle p de E sur la droite $\mathbb{K}u$, parallèlement à H .

En déduire qu'il existe λ_u dans \mathbb{K} tel que $f(u) = \lambda_u u$.

Pour tous u, v , montrer que $\lambda_u = \lambda_v$, selon que u et v sont libres ou liés.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

– Il est facile de vérifier que φ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F, G)$.

– L'injectivité de g implique celle de φ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Si $\text{Im } f \subset \text{Im } g$, se donner u quelconque dans E .

Si $F = \text{Ker } g \oplus F'$, montrer qu'il existe un unique w dans F' tel que $g(w) = f(u)$.

Poser alors $w = h(u)$, et vérifier que h est linéaire.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Si $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f$, se donner v dans $\text{Im } g$.

Montrer que $f(u)$ ne dépend pas du vecteur u tel que $g(u) = v$.

Poser $h(v) = f(u)$, et vérifier que l'application h est linéaire de $\text{Im } g$ dans G .

Compléter enfin la définition de h pour en faire une application linéaire de F dans G .

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Se donner u_3 dans E_3 tel que $h_3(u_3) = \vec{0}$. Montrer que $f_3(u_3) = \vec{0}$.

En déduire qu'il existe u_2 dans E_2 tel que $u_3 = f_2(u_2)$.

Montrer qu'il existe u_1 dans E_1 tel que $u_2 = f_1(u_1)$. En déduire $u_3 = \vec{0}$.

2. Se donner v_3 dans F_3 . Montrer qu'il existe u_4 dans E_4 tel que $g_3(v_3) = h_4(u_4)$.

Prouver que $f_4(u_4) = \vec{0}$, et qu'il existe u'_3 dans E_3 tel que $f_3(u'_3) = u_4$.

En déduire que $v_3 - h_3(u'_3)$ est dans $\text{Im } g_2$, puis dans $\text{Im } (h_3 \circ f_2)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Pour la réciproque, écarter rapidement le cas particulier $f = 0$.

Se donner $u \neq \vec{0}$ tel que $f(u) = \vec{0}$ et v tel que $f(v) \neq \vec{0}$.

Noter que $w = v + u$ et v sont libres, et considérer les droites vectorielles $\mathbb{K}v$ et $\mathbb{K}w$.