

## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $E$  l'espace vectoriel de toutes les fonctions de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de  $E$  ?

1.  $A = \{f \in E, 2f(0) = f(1)\}$ .
2.  $B = \{f \in E, f(1) = f(0) + 1\}$ .
3.  $C = \{f \in E, f \geq 0\}$ .
4.  $D = \{f \in E, f(x) \equiv f(1 - x)\}$ .
5.  $F = \{f \in E, f \text{ polynômiale de degré } 4\}$ .
6.  $G = \{f \in E, f \text{ polynômiale de degré } \leq 4\}$ .

### EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Montrer que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E \Leftrightarrow F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

### EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

$A, B, C$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que :  $A \cap C \subset B$ ,  $C \subset A + B$  et  $B \subset C$ .

Montrer que  $B = C$ .

### EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Montrer que dans l'espace vectoriel  $E$  de toutes les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , les ensembles  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{I}$  formés respectivement des fonctions paires et impaires forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

### EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $A, B, C, D$  quatre sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = A \oplus B = C \oplus D$ .

On suppose que  $A \subset C$  et  $B \subset D$ . Montrer que  $A = C$  et  $B = D$ .

### EXERCICE 6 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces de  $E$  tels que  $E = E_1 + E_2$ .  
Soit  $F_2$  un supplémentaire de  $E_1 \cap E_2$  dans  $E_2$ . Montrer que  $E = E_1 \oplus F_2$ .
2. Soient  $E_1, E_2, \dots, E_n$  des sous-espaces de  $E$  tels que  $E = E_1 + E_2 + \dots + E_n$ .  
Montrer qu'il existe des sous-espaces  $F_1, F_2, \dots, F_n$  de  $E$  tels que pour tout indice  $j$  on ait l'inclusion  $F_j \subset E_j$  et tels que  $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$ .

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

$A, D, G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Ce n'est pas vrai pour  $B, C, F$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Si  $F \cup G$  est un sous-espace de  $E$ , supposer par exemple que  $F$  n'est pas inclus dans  $G$ .

Se donner un élément  $f$  de  $F$  qui n'est pas dans  $G$ .

Pour tout  $g$  de  $G$ , considérer  $h = f + g$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Si  $c$  est dans  $C$ , il existe  $a$  dans  $A$  et  $b$  dans  $B$  tels que  $c = a + b$ .

Constater que  $a$  est dans  $B$ , et qu'il en est donc de même de  $c = a + b$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Soit  $f$  dans  $E$ . Supposer que  $f$  s'écrit  $f = p + i$ .

En déduire l'expression nécessaire de  $p(x)$  et de  $i(x)$ , puis vérifier.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Pour tout  $c$  dans  $C$ , il existe  $a$  dans  $A$  et  $b$  dans  $B$  tels que  $c = a + b$ .

Montrer que  $c$  est dans  $D$ . En déduire  $c = a$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

1. Se donner  $x$  de  $E$  et l'écrire  $x = x_1 + x_2$ , avec  $x_1$  dans  $E_1$  et  $x_2$  dans  $E_2$ .

Utiliser  $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus F_2$  pour montrer que  $x$  est dans  $E_1 + F_2$ .

Montrer ensuite que si  $x \in E_1 \cap F_2$ , alors  $x \in E_1 \cap E_2 \cap F_2$ .

2. Procéder par récurrence sur l'entier  $n \geq 2$ .

Dans le passage du rang  $n - 1$  au rang  $n$ , supposer  $E = E_1 + E_2 + \dots + E_{n-1} + E_n$ .

Poser  $E' = E_1 + E_2 + \dots + E_{n-1}$  et utiliser la question 1).

Appliquer ensuite l'hypothèse de récurrence.