Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit E l'espace vectoriel de toutes les fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de E ?

1. $A = \{f \in E, 2f(0) = f(1)\}$.
2. $B = \{f \in E, f(1) = f(0) + 1\}$.
3. $C = \{f \in E, f \geq 0\}$.
4. $D = \{f \in E, f(x) \equiv f(1-x)\}$.
5. $F = \{f \in E, f$ polynômiale de degré $4\}$.
6. $G = \{f \in E, f$ polynômiale de degré $\leq 4\}$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

A, B, C sont des sous-espaces vectoriels de E tels que : $A \cap C \subset B$, $C \subset A + B$ et $B \subset C$.
Montrer que $B = C$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Montrer que dans l'espace vectoriel E de toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ formés respectivement des fonctions paires et impaires forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soient A, B, C, D quatre sous-espaces vectoriels de E tels que $E = A \oplus B = C \oplus D$.
On suppose que $A \subset C$ et $B \subset D$. Montrer que $A = C$ et $B = D$.

EXERCICE 6 [Indication] [Correction]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces de E tels que $E = E_1 + E_2$.
   Soit F_2 un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans E_2. Montrer que $E = E_1 \oplus F_2$.
2. Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des sous-espaces de E tels que $E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$.
   Montrer qu'il existe des sous-espaces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ de E tels que pour tout indice j on ait l'inclusion $F_j \subset E_j$ et tels que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

A, D, G sont des sous-espaces vectoriels de E. Ce n'est pas vrai pour B, C, F.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Si $F \cup G$ est un sous-espace de E, supposer par exemple que$F$ n'est pas inclus dans G.

Se donner un élément f de F qui n'est pas dans G.

Pour tout g de G, considérer $h = f + g$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Si c est dans C, il existe a dans A et b dans B tels que $c = a + b$.

Constater que a est dans B, et qu'il en est donc de même de $c = a + b$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Soit f dans E. Supposer que f s'écrit $f = p + i$.

En déduire l'expression nécessaire de $p(x)$ et de $i(x)$, puis vérifier.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Pour tout c dans C, il existe a dans A et b dans B tels que $c = a + b$.

Montrer que c est dans D. En déduire $c = a$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

1. Se donner x de E et l'écrire $x = x_1 + x_2$, avec x_1 dans E_1 et x_2 dans E_2.
   Utiliser $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus F_2$ pour montrer que x est dans $E_1 + F_2$.
   Montrer ensuite que si $x \in E_1 \cap F_2$, alors $x \in E_1 \cap E_2 \cap F_2$.
2. Procéder par récurrence sur l'entier $n \geq 2$.
   Dans le passage du rang $n - 1$ au rang n, supposer $E = E_1 + E_2 + \cdots + E_{n-1} + E_n$.
   Poser $E' = E_1 + E_2 + \cdots + E_{n-1}$ et utiliser la question 1).
   Appliquer ensuite l'hypothèse de récurrence.