Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Etudier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x^\beta)}$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Etudier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{1} |1 - x^\alpha|^\beta\,\mathrm{d}x$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

On définit la fonction Gamma d'Euler : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Préciser le domaine de définition de Γ.
2. Etablir la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Constater que $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} f(x) = 0$ et que $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{x} f(x) = 0$.

Poser $t = \dfrac{1}{x}$ pour $0 < a \leq x \leq b$. Dans le résultat, passer à la limite et trouver $I = 0$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

L'intégrale existe si et seulement si α est strictement compris entre 1 et $1 - \beta$, avec $\beta \neq 0$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$.

Poser $I = \lim\limits_{a\to 0} I_a$, en notant $I_a = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

Poser $t = 2x$ dans la deuxième intégrale et en déduire $I_a = \displaystyle\int_a^{2a} \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x}\,\mathrm{d}x + \ln 2$.

Conclure en utilisant la continuité de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x}$ en 0.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

L'intégrale existe si et seulement si $\beta > \max(-1, -1 - \alpha)$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. $\Gamma(x)$ est définie si et seulement si $x > 0$.
2. Avec $x > 0$, intégrer $\Gamma(x+1)$ par parties. On trouve $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

   Montrer enfin que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$