

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x^\beta)}$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^1 |1 - x^\alpha|^\beta dx$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On définit la fonction Gamma d'Euler : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Préciser le domaine de définition de Γ .
2. Etablir la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n)$ pour tout n de \mathbb{N}^* .



Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Constater que $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}f(x) = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} x\sqrt{x}f(x) = 0$.

Poser $t = \frac{1}{x}$ pour $0 < a \leq x \leq b$. Dans le résultat, passer à la limite et trouver $I = 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

L'intégrale existe si et seulement si α est strictement compris entre 1 et $1 - \beta$, avec $\beta \neq 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = 0$.

Poser $I = \lim_{a \rightarrow 0} I_a$, en notant $I_a = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_a^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} dx$.

Poser $t = 2x$ dans la deuxième intégrale et en déduire $I_a = \int_a^{2a} \frac{e^{-x} - 1}{x} dx + \ln 2$.

Conclure en utilisant la continuité de $x \mapsto \frac{e^{-x} - 1}{x}$ en 0.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

L'intégrale existe si et seulement si $\beta > \max(-1, -1 - \alpha)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. $\Gamma(x)$ est définie si et seulement si $x > 0$.
2. Avec $x > 0$, intégrer $\Gamma(x + 1)$ par parties. On trouve $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.
Montrer enfin que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n - 1)!$