



## Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale  $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ .

EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ .

EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$ .

EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Prouver l'existence de l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$ .

Calculer cette intégrale de trois façons différentes.

EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$ .

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f_n(x) = 0$ .

Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $I_n = nI_{n-1}$ . En déduire  $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!$

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Constater que  $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$  en 0 et  $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{1-x}}$  en 1.

Utiliser le changement de variable  $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin t$ . En déduire  $I = \pi$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Constater  $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$  en  $\pm\infty$ . Poser  $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t$ . Finalement  $I = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Pour l'existence de l'intégrale, utiliser  $|f(x)| \leq e^{-x}$ .

- *Première méthode* : écrire  $f(x) = \operatorname{Re}(e^{(i-1)x})$ . En déduire  $I = \operatorname{Re} \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}$ .
- *Deuxième méthode* : double intégration par parties.
- *Troisième méthode* : chercher une primitive de la forme  $e^{-x}(a \sin x + b \cos x)$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Pour l'existence, utiliser  $f(x) \sim \frac{1}{x^3}$  au voisinage de  $+\infty$ .

Décomposer  $\frac{1}{x^3+1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ . On trouve  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ .