Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Prouver l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

Calculer cette intégrale de trois façons différentes.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 f_n(x) = 0$.

Pour $n \geq 1$, montrer que $I_n = nI_{n-1}$. En déduire $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!$

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Constater que $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en 0 et $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ en 1.

Utiliser le changement de variable $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin t$. En déduire $I = \pi$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Constater $f(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$ en $\pm\infty$. Poser $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t$. Finalement $I = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Pour l'existence de l'intégrale, utiliser $|f(x)| \leq \mathrm{e}^{-x}$.

– *Première méthode :* écrire $f(x) = \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)\mathrm{x}}\right)$. En déduire $I = \operatorname{Re}\dfrac{1+\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

– *Deuxième méthode :* double intégration par parties.

– *Troisième méthode :* chercher une primitive de la forme $\mathrm{e}^{-x}(a\sin x + b\cos x)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Pour l'existence, utiliser $f(x) \sim \dfrac{1}{x^3}$ au voisinage de $+\infty$.

Décomposer $\dfrac{1}{x^3+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$. On trouve $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.