Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = \int_a^b f(x+t)\cos t \, dt$.

Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer g'.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Montrer que $\int_{\mathrm{e}}^x \ln \ln t \, dt \sim x \ln \ln x$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer $I(a) = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx$ pour tout $a > 0$. On donnera deux méthodes différentes.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Déterminer les applications continues f telles que, pour tout x : $f(x) + \int_0^x (x-t) f(t) \, dt = 1$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Calculer la limite de $I(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\arctan t}{t} \, dt$ quand x tend vers 0 ou vers $+\infty$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Poser $u = t + x$, développer le cosinus, et dériver l'application g.

On trouve $g'(x) = \displaystyle\int_a^b f(x+t)\sin t\,\mathrm{d}t + f(b+x)\cos b - f(a+x)\cos a$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Intégrer par parties. Justifier et utiliser l'encadrement $0 \leq \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leq x$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

– Première méthode : utiliser le changement de variable défini par $t = \dfrac{1}{x}$.
– Deuxième méthode : dériver $I(a)$ par rapport à la variable a.

On trouve : $\forall\, a > 0, I(a) = 0$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Supposer que f est solution. Vérifier que $f(0) = 0$.

Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $f'(0) = 0$ et que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f(x)$.

En déduire la seule solution possible, puis vérifier.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

– Montrer qu'on peut écrire $I(x) = \dfrac{\arctan c_x}{c_x}$, avec c_x compris entre 0 et x.
– Pour tout $x \geq 1$, prouver que $0 \leq I(x) \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{\pi \ln x}{2x}$.