Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue par morceaux. Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \,\mathrm{d}x = 0$.
On supposera d'abord que f est une fonction caractéristique, puis que f est en escaliers.
Comment simplifier la démonstration si on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue par morceaux. Prouver $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x) |\sin \lambda x| \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$.
Même indication que dans l'exercice précédent.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer $\displaystyle I_{\lambda,n} = \int_0^1 x^\lambda \ln^n x \,\mathrm{d}x$ ($\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} \,\mathrm{d}t = \ln \frac{b}{a}$ (avec $0 < a < b$).

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. ◇ Si f est une fonction caractéristique, montrer que $\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2}{\lambda}$.
   ◇ Si f est en escaliers, c'est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques.
   ◇ Supposer que f soit continue par morceaux, et se donner $\varepsilon > 0$.
   Il existe une application φ, en escaliers et telle que $\sup\limits_{[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
   En déduire $\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b \varphi(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right|$ et conclure.
2. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut intégrer par parties.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

◇ Supposer que f est la fonction caractéristique de $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$.
Considérer l'entier p minimum tel que $\lambda\alpha \leq p\pi$ et l'entier q maximum tel que $q\pi \leq \lambda\beta$.
Prouver que $\int_a^b f(x)\,|\sin\lambda x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda\alpha}^{p\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\lambda}\int_{p\pi}^{q\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\lambda}\int_{q\pi}^{\lambda\beta} |\sin t|\,\mathrm{d}t$.
Montrer qu'il suffit de vérifier que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\int_{p\pi}^{q\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
Observer pour cela que $\frac{1}{\lambda}\int_{p\pi}^{q\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = 2\frac{q-p}{\lambda}$.

◇ Généraliser par linéarité aux fonctions en escaliers.

◇ Si f est continue par morceaux, l'approcher par φ en escaliers.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

En intégrant par parties, obtenir $I_{\lambda,n} = -\frac{n}{\lambda+1} I_{\lambda,n-1}$, puis $I_{\lambda,n} = (-1)^n \frac{n!}{(\lambda+1)^{n+1}}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Constater que $\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t - \ln\frac{b}{a} = \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t - t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange pour obtenir $\left|\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t - t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{(b^2-a^2)x^2}{12}$.