

## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue par morceaux. Montrer que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0$ .

On supposera d'abord que  $f$  est une fonction caractéristique, puis que  $f$  est en escaliers. Comment simplifier la démonstration si on suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  ?

### EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue par morceaux. Prouver  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) |\sin \lambda x| \, dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) \, dx$ .  
Même indication que dans l'exercice précédent.

### EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Calculer  $I_{\lambda, n} = \int_0^1 x^\lambda \ln^n x \, dx$  ( $\lambda > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ).

### EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} \, dt = \ln \frac{b}{a}$  (avec  $0 < a < b$ ).

## Indications ou résultats

### INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1.  $\diamond$  Si  $f$  est une fonction caractéristique, montrer que  $\left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx \right| \leq \frac{2}{\lambda}$ .
  - $\diamond$  Si  $f$  est en escaliers, c'est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques.
  - $\diamond$  Supposer que  $f$  soit continue par morceaux, et se donner  $\varepsilon > 0$ .  
Il existe une application  $\varphi$ , en escaliers et telle que  $\sup_{[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ .  
En déduire  $\left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_a^b \varphi(x) \sin \lambda x \, dx \right|$  et conclure.
2. Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , on peut intégrer par parties.

### INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

- $\diamond$  Supposer que  $f$  est la fonction caractéristique de  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ .  
Considérer l'entier  $p$  minimum tel que  $\lambda\alpha \leq p\pi$  et l'entier  $q$  maximum tel que  $q\pi \leq \lambda\beta$ .  
Prouver que  $\int_a^b f(x) |\sin \lambda x| \, dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda\alpha}^{p\pi} |\sin t| \, dt + \frac{1}{\lambda} \int_{p\pi}^{q\pi} |\sin t| \, dt + \frac{1}{\lambda} \int_{q\pi}^{\lambda\beta} |\sin t| \, dt$ .  
Montrer qu'il suffit de vérifier que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{p\pi}^{q\pi} |\sin t| \, dt = \frac{2}{\pi} \int_a^b |f(x)| \, dx$ .  
Observer pour cela que  $\frac{1}{\lambda} \int_{p\pi}^{q\pi} |\sin t| \, dt = 2 \frac{q-p}{\lambda}$ .
- $\diamond$  Généraliser par linéarité aux fonctions en escaliers.
- $\diamond$  Si  $f$  est continue par morceaux, l'approcher par  $\varphi$  en escaliers.

### INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

En intégrant par parties, obtenir  $I_{\lambda,n} = -\frac{n}{\lambda+1} I_{\lambda,n-1}$ , puis  $I_{\lambda,n} = (-1)^n \frac{n!}{(\lambda+1)^{n+1}}$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Constater que  $\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} \, dt - \ln \frac{b}{a} = \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t - t}{t^2} \, dt$ .

Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange pour obtenir  $\left| \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t - t}{t^2} \, dt \right| \leq \frac{(b^2 - a^2)x^2}{12}$ .