

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0$.

On supposera d'abord que f est une fonction caractéristique, puis que f est en escaliers. Comment simplifier la démonstration si on suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 ?

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux. Prouver $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) |\sin \lambda x| \, dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) \, dx$.
Même indication que dans l'exercice précédent.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer $I_{\lambda, n} = \int_0^1 x^\lambda \ln^n x \, dx$ ($\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$).

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} \, dt = \ln \frac{b}{a}$ (avec $0 < a < b$).

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. \diamond Si f est une fonction caractéristique, montrer que $\left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx \right| \leq \frac{2}{\lambda}$.
 - \diamond Si f est en escaliers, c'est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques.
 - \diamond Supposer que f soit continue par morceaux, et se donner $\varepsilon > 0$.
Il existe une application φ , en escaliers et telle que $\sup_{[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
En déduire $\left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_a^b \varphi(x) \sin \lambda x \, dx \right|$ et conclure.
2. Si f est de classe \mathcal{C}^1 , on peut intégrer par parties.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

- \diamond Supposer que f est la fonction caractéristique de $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.
Considérer l'entier p minimum tel que $\lambda\alpha \leq p\pi$ et l'entier q maximum tel que $q\pi \leq \lambda\beta$.
Prouver que $\int_a^b f(x) |\sin \lambda x| \, dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda\alpha}^{p\pi} |\sin t| \, dt + \frac{1}{\lambda} \int_{p\pi}^{q\pi} |\sin t| \, dt + \frac{1}{\lambda} \int_{q\pi}^{\lambda\beta} |\sin t| \, dt$.
Montrer qu'il suffit de vérifier que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{p\pi}^{q\pi} |\sin t| \, dt = \frac{2}{\pi} \int_a^b |f(x)| \, dx$.
Observer pour cela que $\frac{1}{\lambda} \int_{p\pi}^{q\pi} |\sin t| \, dt = 2 \frac{q-p}{\lambda}$.
- \diamond Généraliser par linéarité aux fonctions en escaliers.
- \diamond Si f est continue par morceaux, l'approcher par φ en escaliers.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

En intégrant par parties, obtenir $I_{\lambda,n} = -\frac{n}{\lambda+1} I_{\lambda,n-1}$, puis $I_{\lambda,n} = (-1)^n \frac{n!}{(\lambda+1)^{n+1}}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Constater que $\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} \, dt - \ln \frac{b}{a} = \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t - t}{t^2} \, dt$.

Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange pour obtenir $\left| \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t - t}{t^2} \, dt \right| \leq \frac{(b^2 - a^2)x^2}{12}$.