

## Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Calculer  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$ .

EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Calculer  $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t} dt$ .

EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f$  une application continue sur  $[0, 1]$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$ .

EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ , telle que  $f(1) = 0$ .

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = f'(1)$  (on pourra utiliser l'exercice précédent.)

EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Pour tout entier  $n$ , calculer  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx$ .

EXERCICE 6 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Pour tout entier  $n$ , calculer  $J_n = \int_0^{\pi} x \sin^{2n} x dx$ .

EXERCICE 7 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

On pose  $I_n^m = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$ , où  $m$  et  $n$  sont deux entiers naturels.

1. Trouver une relation entre  $I_n^m$  et  $I_{n-1}^{m+1}$ . En déduire  $I_n^m$ .

2. Calculer  $J_n^m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x dx$

3. En déduire  $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx$ .

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Prouver que la suite  $(I_n)$  est constante, de valeur  $\frac{\pi}{2}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On note  $I_n$  l'intégrale de l'exercice précédent. Montrer  $J_{n+1} - J_n = I_n$ , puis  $J_n = n \frac{\pi}{2}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer  $u_n = (n+1) \int_0^1 x^n (f(x) - f(1)) dx$ .

Fixer  $a \in [0, 1]$  et découper en deux intégrales, l'une sur  $[0, a]$ , l'autre sur  $[a, 1]$ .

Avec  $\varepsilon > 0$  donné, choisir  $a$  pour que  $a \leq x \leq 1 \Rightarrow |f(x) - f(1)| \leq \varepsilon$ .

En déduire  $|u_n| \leq 2Ma^{n+1} + \varepsilon$ , avec  $M = \max_{[0,1]} |f(x)|$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Intégrer  $v_n = (n+2)(n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx$  par parties, et utiliser l'exercice précédent.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On intègre par parties. On trouve  $I_n = (2n-1)(I_{n-1} - I_n)$  puis  $I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

Poser  $t = \pi - x$ . En déduire  $J_n = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^{2n} t dt$ .

Si  $I_n$  est l'intégrale de l'exercice précédent, prouver  $\int_0^\pi \sin^{2n} t dt = 2I_n$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [Retour à l'énoncé]

1. Répéter une intégration par parties. On trouve  $I_n^m = \frac{n}{m+1} I_{n-1}^{m+1}$  puis  $I_m^n = \frac{m! n!}{(m+n+1)!}$ .

2. Poser  $x = \sin^2 t$ . On trouve  $I_n^m = 2J_n^m$  donc  $J_n^m = \frac{1}{2} \frac{m! n!}{(m+n+1)!}$ .

3. Avec  $m = n$ , on trouve  $J_n^n = \frac{1}{2^{2n+2}} \int_0^\pi (\sin x)^{2n+1} dx$ .

Poser  $x = \pi - t$  pour obtenir  $J_n^n = \frac{1}{2^{2n+1}} K_n$  donc  $K_n = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$ .