

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t} dt$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f une application continue sur $[0, 1]$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f une application de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, telle que $f(1) = 0$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = f'(1)$ (on pourra utiliser l'exercice précédent.)

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Pour tout entier n , calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx$.

EXERCICE 6 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Pour tout entier n , calculer $J_n = \int_0^{\pi} x \sin^{2n} x dx$.

EXERCICE 7 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On pose $I_n^m = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$, où m et n sont deux entiers naturels.

1. Trouver une relation entre I_n^m et I_{n-1}^{m+1} . En déduire I_n^m .

2. Calculer $J_n^m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x dx$

3. En déduire $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Prouver que la suite (I_n) est constante, de valeur $\frac{\pi}{2}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On note I_n l'intégrale de l'exercice précédent. Montrer $J_{n+1} - J_n = I_n$, puis $J_n = n \frac{\pi}{2}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer $u_n = (n+1) \int_0^1 x^n (f(x) - f(1)) dx$.

Fixer $a \in [0, 1]$ et découper en deux intégrales, l'une sur $[0, a]$, l'autre sur $[a, 1]$.

Avec $\varepsilon > 0$ donné, choisir a pour que $a \leq x \leq 1 \Rightarrow |f(x) - f(1)| \leq \varepsilon$.

En déduire $|u_n| \leq 2Ma^{n+1} + \varepsilon$, avec $M = \max_{[0,1]} |f(x)|$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Intégrer $v_n = (n+2)(n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx$ par parties, et utiliser l'exercice précédent.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On intègre par parties. On trouve $I_n = (2n-1)(I_{n-1} - I_n)$ puis $I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

Poser $t = \pi - x$. En déduire $J_n = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^{2n} t dt$.

Si I_n est l'intégrale de l'exercice précédent, prouver $\int_0^\pi \sin^{2n} t dt = 2I_n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [Retour à l'énoncé]

1. Répéter une intégration par parties. On trouve $I_n^m = \frac{n}{m+1} I_{n-1}^{m+1}$ puis $I_m^n = \frac{m! n!}{(m+n+1)!}$.

2. Poser $x = \sin^2 t$. On trouve $I_n^m = 2J_n^m$ donc $J_n^m = \frac{1}{2} \frac{m! n!}{(m+n+1)!}$.

3. Avec $m = n$, on trouve $J_n^n = \frac{1}{2^{2n+2}} \int_0^\pi (\sin x)^{2n+1} dx$.

Poser $x = \pi - t$ pour obtenir $J_n^n = \frac{1}{2^{2n+1}} K_n$ donc $K_n = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$.