

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $E$  l'ensemble des applications continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$ .

Pour toute application  $f$  de  $E$ , on pose  $I(f) = \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx$ .

1. Montrer que pour toute  $f$  dans  $E$ ,  $I(f) \geq (b-a)^2$ . Quand y-a-t-il égalité ?
2. Montrer plus précisément que  $\{I(f), f \in E\} = [(b-a)^2, +\infty[$ .

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue, telle que  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx$ .

Montrer que  $f$  garde un signe constant sur  $[a, b]$ .

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ , et telle que  $f(a) = f(b) = 0$ .

Montrer que  $\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^b f'^2(x) dx$ .

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que  $x > a > e^2 \Rightarrow \int_a^x \frac{dt}{\ln t} < \frac{2x}{\ln x}$ .

**EXERCICE 5** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ .

**EXERCICE 6** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application continue et positive sur  $[a, b]$ .

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{I_n} = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ , avec  $I_n = \int_a^b f^n(x) dx$ .

## Indications ou résultats

### INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il y a égalité  $\Leftrightarrow f$  est constante.
2. Considérer les applications  $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$ , avec  $\lambda > 0$ .

Vérifier que  $I(f_\lambda) = (b-a)^2 \varphi^2\left(\frac{(b-a)\lambda}{2}\right)$ , avec  $\varphi(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ , et étudier la fonction  $\varphi$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Noter  $\varepsilon = \pm 1$  selon le signe de  $\int_a^b f(x) dx$ , et utiliser la continuité de  $x \mapsto |f(x)| - \varepsilon f(x)$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que  $f(x) = \int_a^x f'(t) dt$ , puis utiliser Cauchy-Schwarz pour majorer  $f^2(x)$ .

En notant  $c = \frac{a+b}{2}$ , en déduire une majoration de  $\int_a^c f^2(x) dx$ .

Effectuer le même travail, mais à partir de  $b$  et sur le segment  $[c, b]$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Montrer que  $f : x \mapsto \frac{2x}{\ln x} - \int_a^x \frac{dt}{\ln t}$  est croissante sur  $[a, +\infty[$ , et que  $f(a) > 0$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Utiliser le changement de variable  $t = \pi - x$ .

En déduire  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{x(\pi - x)} \sin x dx$ .

Étudier ensuite l'application  $x \mapsto \varphi(x) = \frac{\pi - 2x}{x(\pi - x)} \sin x$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

Se donner  $\varepsilon > 0$ . Observer qu'il existe  $n_0$  tel que  $n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{I_n} \leq M + \varepsilon$ , où  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ .

Se placer ensuite sur un sous-segment sur lequel  $f(x) \geq M - \frac{\varepsilon}{2}$ .