

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E l'ensemble des applications continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R}^{+*} .

Pour toute application f de E , on pose $I(f) = \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx$.

1. Montrer que pour toute f dans E , $I(f) \geq (b - a)^2$. Quand y-a-t-il égalité ?
2. Montrer plus précisément que $\{I(f), f \in E\} = [(b - a)^2, +\infty[$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f une application $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que $\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx$.

Montrer que f garde un signe constant sur $[a, b]$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f une application de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, et telle que $f(a) = f(b) = 0$.

Montrer que $\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b - a)^2}{8} \int_a^b f'^2(x) dx$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que $x > a > e^2 \Rightarrow \int_a^x \frac{dt}{\ln t} < \frac{2x}{\ln x}$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

EXERCICE 6 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f une application continue et positive sur $[a, b]$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{I_n} = \max_{x \in [a, b]} f(x)$, avec $I_n = \int_a^b f^n(x) dx$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il y a égalité $\Leftrightarrow f$ est constante.
2. Considérer les applications $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$, avec $\lambda > 0$.

Vérifier que $I(f_\lambda) = (b-a)^2 \varphi^2\left(\frac{(b-a)\lambda}{2}\right)$, avec $\varphi(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$, et étudier la fonction φ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Noter $\varepsilon = \pm 1$ selon le signe de $\int_a^b f(x) dx$, et utiliser la continuité de $x \mapsto |f(x)| - \varepsilon f(x)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Remarquer que $f(x) = \int_a^x f'(t) dt$, puis utiliser Cauchy-Schwarz pour majorer $f^2(x)$.

En notant $c = \frac{a+b}{2}$, en déduire une majoration de $\int_a^c f^2(x) dx$.

Effectuer le même travail, mais à partir de b et sur le segment $[c, b]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Montrer que $f : x \mapsto \frac{2x}{\ln x} - \int_a^x \frac{dt}{\ln t}$ est croissante sur $[a, +\infty[$, et que $f(a) > 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Utiliser le changement de variable $t = \pi - x$.

En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{x(\pi - x)} \sin x dx$.

Étudier ensuite l'application $x \mapsto \varphi(x) = \frac{\pi - 2x}{x(\pi - x)} \sin x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Se donner $\varepsilon > 0$. Observer qu'il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{I_n} \leq M + \varepsilon$, où $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$.

Se placer ensuite sur un sous-segment sur lequel $f(x) \geq M - \frac{\varepsilon}{2}$.