Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit E l'ensemble des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour toute application f de E, on pose $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour toute f dans E, $I(f) \geq (b-a)^2$. Quand y-a-t-il égalité ?
2. Montrer plus précisément que $\{I(f), f \in E\} = [(b-a)^2, +\infty[$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f une application $[a,b] \to \mathbb{R}$, continue, telle que $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Montrer que f garde un signe constant sur $[a,b]$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, et telle que $f(a) = f(b) = 0$.

Montrer que $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Montrer que $x > a > \mathrm{e}^2 \Rightarrow \displaystyle\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} < \frac{2x}{\ln x}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x > \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit f une application continue et positive sur $[a,b]$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{I_n} = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, avec $I_n = \displaystyle\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il y a égalité $\Leftrightarrow f$ est constante.
2. Considérer les applications $f_\lambda : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$, avec $\lambda > 0$.

   Vérifier que $I(f_\lambda) = (b-a)^2\varphi^2\left(\frac{(b-a)\lambda}{2}\right)$, avec $\varphi(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$, et étudier la fonction φ.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Noter $\varepsilon = \pm 1$ selon le signe de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, et utiliser la continuité de $x \mapsto |f(x)| - \varepsilon f(x)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que $f(x) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$, puis utiliser Cauchy-Schwarz pour majorer $f^2(x)$.

En notant $c = \dfrac{a+b}{2}$, en déduire une majoration de $\displaystyle\int_a^c f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Effectuer le même travail, mais à partir de b et sur le segment $[c, b]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{2x}{\ln x} - \displaystyle\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ est croissante sur $[a, +\infty[$, et que $f(a) > 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Utiliser le changement de variable $t = \pi - x$.

En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{x(\pi - x)} \sin x\,\mathrm{d}x$.

Étudier ensuite l'application $x \mapsto \varphi(x) = \dfrac{\pi - 2x}{x(\pi - x)} \sin x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

Se donner $\varepsilon > 0$. Observer qu'il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{I_n} \leq M + \varepsilon$, où $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Se placer ensuite sur un sous-segment sur lequel $f(x) \geq M - \frac{\varepsilon}{2}$.