

## Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f : I \rightarrow J$  convexe et strictement monotone. Étudier la convexité de  $f^{-1} : J \rightarrow I$ .

EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexes,  $g$  étant croissante. Montrer que  $g \circ f$  est convexe.

EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexes. Les applications  $\sup(f, g)$  et  $\inf(f, g)$  sont-elles convexes ?

EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ . Montrer que  $\ln(f)$  convexe  $\Rightarrow f$  convexe. Réciproque ?

EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction majorée de classe  $\mathcal{C}^2$ .

On suppose l'existence d'un réel  $a > 0$  tel que :  $\forall x \geq 0, f''(x) \geq af(x) \geq 0$ .

1. Montrer que  $f$  est décroissante.
2. Quelle est la limite de  $f'$  en  $+\infty$  ?
3. Montrer que  $\lim_{+\infty} f(x) = 0$ .
4. Montrer que  $\forall x \geq 0, f(x) \leq f(0) e^{-x\sqrt{a}}$ .

EXERCICE 6 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Montrer que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et majorée, alors elle est constante.

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Si  $f$  est strictement croissante convexe, alors  $f^{-1}$  est concave.

Si  $f$  est strictement décroissante convexe, alors  $f^{-1}$  est convexe.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Utiliser la convexité de  $f$ , puis la croissance de  $g$ , puis la convexité de  $g$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

L'application  $\sup(f, g)$  est convexe.

Cela n'est pas vrai en général pour  $\inf(f, g)$  : exemple  $f(x) \equiv 0$  et  $g(x) \equiv x$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Cela résulte de l'exercice précédent. La réciproque est fautive (considérer  $f : x \mapsto x$ .)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. L'application  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}^+$ , donc  $f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$  pour tous  $a, x$ .

En déduire que  $f$  est décroissante.

2. Justifier l'existence de  $\alpha \leq 0$  tel que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha$ .

Supposer  $\alpha < 0$  et aboutir à une contradiction.

3. Justifier l'existence de  $\beta \geq 0$  tel que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \beta$ .

Supposer  $\beta > 0$  et aboutir à une contradiction.

4. Pour tout  $x \geq 0$ , poser  $g(x) = f(x) e^{x\sqrt{a}}$ .

Vérifier que  $g$  satisfait à des hypothèses analogues à celles de  $f$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

Supposer qu'il existe  $a, b$  dans  $\mathbb{R}$ , avec  $a < b$  et  $f(a) \neq f(b)$ .

Justifier que pour tout  $x > b$ , on a  $f(x) \geq \alpha(x - a) + f(a)$ , avec  $\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

Montrer également que  $x < a \Rightarrow f(x) \geq \alpha(x - a) + f(a)$ .

Discuter enfin suivant le signe de  $\alpha$ .