

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application continue sur  $[a, b]$ , deux fois dérivable sur  $]a, b[$ .

Montrer que pour tout  $x$  de  $]a, b[$ , il existe un  $c$  de  $]a, b[$  tel que :

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + \frac{(x - a)(x - b)}{2} f''(c)$$

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application trois fois dérivable sur  $[a, b]$ .

Montrer  $\exists c \in ]a, b[$ ,  $f(b) = f(a) + \frac{b - a}{2} [f'(a) + f'(b)] - \frac{(b - a)^3}{12} f'''(c)$ .

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application dérivable sur  $[a, b]$ , telle que  $f'(a) = f'(b)$ .

Montrer qu'il existe un réel  $c$  de  $]a, b[$  tel que  $f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$ .

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $[0, 2]$  telle que  $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ .

Montrer que pour  $x$  de  $[0, 2]$ , il existe  $c$  dans  $]0, 2[$  tel que  $f(x) = \frac{x(x - 1)(x - 2)}{6} f'''(c)$ .

**EXERCICE 5** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $g$  une application impaire et cinq fois dérivable de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Montrer qu'il existe un réel  $c$  de  $]0, 1[$  tel que :  $g(1) = \frac{1}{3}(g'(1) + 2g'(0)) - \frac{1}{180}g^{(5)}(c)$ .

## Indications ou résultats

### INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

C'est évident si  $x = a$  ou  $x = b$ . On suppose donc  $x \notin \{a, b\}$ .

Considérer  $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) - \frac{(t - a)(t - b)}{2} \lambda$ .

On choisit  $\lambda$  pour que  $\varphi(x) = 0$ . Appliquer deux fois Rolle à  $\varphi$ , puis une fois à  $\varphi'$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Définir l'application  $g : x \mapsto g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x - a}{2}(f'(a) + f'(x)) + \lambda(x - a)^3$ .

Choisir  $\lambda$  pour que  $g(b) = 0$ . Calculer  $g'$  et  $g''$ .

Appliquer deux fois Rolle, pour trouver  $c$  dans  $]a, d[$  tel que  $g''(c) = 0$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Considérer l'application définie sur  $[a, b]$  par  $\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

Vérifier que  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ , et que  $\varphi'(a) = \varphi'(b)$ .

Traiter le cas particulier  $\varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$ .

Dans le cas général, prouver qu'il existe  $x_0$  dans  $]a, b[$  tel que  $\varphi(x_0) = 0$ .

Terminer en appliquant Rolle à l'application  $x \mapsto \psi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

C'est évident si  $x \in \{0, 1, 2\}$ . On fixe donc  $x$ , distinct de 0, 1, 2.

Considérer  $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = f(t) - \frac{t(t - 1)(t - 2)}{6} \lambda$ , où  $\lambda$  est tel que  $\varphi(x) = 0$ .

Appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle.

### INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Utiliser  $\varphi(x) = g(x) - \frac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) + \lambda x^5$ , avec  $\lambda$  tel que  $\varphi(1) = 0$ .

Constater que  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi^{(3)}(0) = \varphi^{(4)}(0) = 0$  et appliquer Rolle plusieurs fois.

Prouver l'existence de  $c_3$  dans  $]0, 1[$  tel que  $\varphi^{(3)}(c_3) = 0$ .

Appliquer l'égalité des accroissements finis à  $g^{(4)}$  entre 0 et  $c_3$ .