Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit f une application continue sur $[a, b]$, deux fois dérivable sur $]a, b[$.
Montrer que pour tout x de $[a, b]$, il existe un c de $]a, b[$ tel que :

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + \frac{(x - a)(x - b)}{2}f''(c)$$

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soit f une application trois fois dérivable sur $[a, b]$.

Montrer $\exists\, c \in\,]\, a, b\, [\ ,\ f(b) = f(a) + \dfrac{b - a}{2}\,[f'(a) + f'(b)] - \dfrac{(b - a)^3}{12}f'''(c)$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soit f une application dérivable sur $[a, b]$, telle que $f'(a) = f'(b)$.

Montrer qu'il existe un réel c de $]a, b]$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0, 2]$ telle que $f(0) = f(1) = f(2) = 0$.

Montrer que pour x de $[0, 2]$, il existe c dans $]0, 2[$ tel que $f(x) = \dfrac{x(x - 1)(x - 2)}{6}f'''(c)$.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soit g une application impaire et cinq fois dérivable de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe un réel c de $]0, 1[$ tel que : $g(1) = \dfrac{1}{3}(g'(1) + 2g'(0)) - \dfrac{1}{180}g^{(5)}(c)$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

C'est évident si $x = a$ ou $x = b$. On suppose donc $x \notin \{a, b\}$.

Considérer $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = f(t) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) - \dfrac{(t - a)(t - b)}{2}\lambda$.

On choisit λ pour que $\varphi(x) = 0$. Appliquer deux fois Rolle à φ, puis une fois à φ'.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Définir l'application $g : x \mapsto g(x)f(x) - f(a) - \dfrac{x - a}{2}(f'(a) + f'(x)) + \lambda(x - a)^3$.

Choisir λ pour que $g(b) = 0$. Calculer g' et g''.

Appliquer deux fois Rolle, pour trouver c dans $]a, d[$ tel que $g''(c) = 0$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer l'application définie sur $[a, b]$ par $\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Vérifier que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, et que $\varphi'(a) = \varphi'(b)$.

Traiter le cas particulier $\varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$.

Dans le cas général, prouver qu'il existe x_0 dans $]a, b[$ tel que $\varphi(x_0) = 0$.

Terminer en appliquant Rolle à l'application $x \mapsto \psi(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

C'est évident si $x \in \{0, 1, 2\}$. On fixe donc x, distinct de $0, 1, 2$.

Considérer $\varphi : t \mapsto f(t) - \dfrac{t(t - 1)(t - 2)}{6}\lambda$, où λ est tel que $\varphi(x) = 0$.

Appliquer plusieurs fois le thórème de Rolle.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $\varphi(x) = g(x) - \dfrac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) + \lambda x^5$, avec λ tel que $\varphi(1) = 0$.

Constater que $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi^{(3)}(0) = \varphi^{(4)}(0) = 0$ et appliquer Rolle plusieurs fois.

Prouver l'existence de c_3 dans $]0, 1[$ tel que $\varphi^{(3)}(c_3) = 0$.

Appliquer l'égalité des accroissements finis à $g^{(4)}$ entre 0 et c_3.