Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Appliquer la formule des accroissements finis à $f(x) = ax^2 + bx + c$ entre x_0 et $x_0 + h$.

Que remarque-t-on ? Interprétation géométrique ?

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soit f une application deux fois dérivable sur $[x_0, x_0 + 2h]$.

Montrer qu'il existe θ dans $]0, 1[$ tel que $f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0) = h^2 f''(x_0 + 2\theta h)$.

(On donnera deux démonstrations de ce résultat.)

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Théorème de Darboux

Soit f une application dérivable sur $[a, b]$.

Montrer que f' prend toutes les valeurs comprises entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soit f une application dérivable de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que pour tout x de $]0, 1[$, $|f'(x)| \leq M$.
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Appliquer la formule des accroissements finis à $f(x) = \arctan x$ entre 0 et h.
Montrer qu'il existe un unique θ tel que $f(h) = hf'(\theta h)$. Calculer θ et $\lim\limits_{h \to 0} \theta$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On constate que $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \frac{h}{2})$.

Soient A, B deux points d'une parabole $\mathcal{P}$, et soit C le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse médiane.

Alors la tangente à $\mathcal{P}$ en C est parallèle à la corde $[AB]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

- Première méthode :

  Considérer l'application φ définie sur $[x_0, x_0+h]$ par $\varphi(t) = f(t+h) - f(t)$.

  Appliquer deux fois l'égalité des accroissements finis.

- Deuxième méthode :

  Considérer l'application $\psi : t \mapsto \psi(t) = f(x_0+2t) - 2f(x_0+t) + f(x_0) - \lambda t^2$.

  Choisir λ pour que $\psi(h) = 0$. Appliquer Rolle puis les accroissements finis.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer les fonctions $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $\psi(x) = \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$.

Prolonger ces fonctions par continuité sur le segment $[a, b]$.

Utiliser le fait que $[f'(a), f'(b)]$ est inclus dans la réunion $[\varphi(a), \varphi(b)] \cup [\psi(a), \psi(b)]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Il suffit de prouver la propriété en 0.

Se donner une suite (x_n) de $]0,1[$ qui converge vers 0.

Montrer que la suite $(f(x_n))$ est également convergente : notons ℓ sa limite.

Montrer que ℓ ne dépend pas de la suite (x_n) initiale.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On trouve $f(h) = hf'(\theta h)$ avec $\theta = \sqrt{\dfrac{h - \arctan h}{h^2 \arctan h}}$. On vérifie que $\lim\limits_{h\to 0} \theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.