Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Calculer la dérivée de $f(x) = \arctan \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}\sin x}{b + a\cos x}$

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer la dérivée de $f(x) = \arccos \dfrac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Trouver une expression de la somme $S_n(x) = 1 + 2x + 3x^3 + \cdots + nx^{n-1}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer la dérivée de $f(x) = \arctan \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ et expliquer le résultat.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soient $k \leq n$ dans $\mathbb{N}$. En utilisant $f_k(x) = \sum\limits_{p=1}^{n} (-1)^p p^k x^p \mathrm{C}_n^p$, calculer $A(n,k) = \sum\limits_{p=1}^{n} (-1)^p p^k \mathrm{C}_n^p$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Quel est le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} = 0$?

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On trouve $f'(x) = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b\cos x + a}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On trouve $f'(x) = \dfrac{2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$ si $x < 0$ et $f'(x) = \dfrac{-2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$ si $x > 0$.

Discuter la dérivabilité en $x = 0$ suivant les valeurs de n.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Observer que $S_n(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^n)'$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

On trouve : $\forall x \in]-1, 1[,\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

On en déduit $f(x) = \arcsin x$ sur $]-1, 1[$.

Ce résultat peut être obtenu en posant $\theta = \arcsin x$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que $f_k(1) = A(n, k)$, et que (pour $k \in \{1, \ldots, n\}$) on a : $f_k(x) = xf'_{k-1}(x)$.

En déduire $f_k(x) = (-1)^k \dfrac{n!}{(n-k)!}\, x^k(1-x)^{n-k} + o((1-x)^{n-k})$ par récurrence.

Finalement $A(n, 0) = -1$, $A(n, n) = (-1)^n n!$ et $A(n, k) = 0$ si $1 \leq k \leq n - 1$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

Poser $f_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$. On a $f'_{n+1}(x) = f_n(x)$ et $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Montrer par récurrence que $f_{2n}(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, et que $f_{2n+1}(x) = 0$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$.