

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit r un réel quelconque. On définit une application f par :

$$f(0) = 0, f(-1) = 0, \text{ et pour tout réel } x \text{ différent de } 0 \text{ et de } -1, f(x) = x \left| 1 + \frac{1}{x} \right|^r.$$

Etudier la continuité de f , ainsi que l'existence et la continuité de f' .

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer la dérivée de $f(x) = \cos x (1 + \tan x \tan \frac{x}{2})$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer la dérivée de $f(x) = \sqrt{\frac{1 + \sin \sqrt{x}}{1 - \sin \sqrt{x}}}$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, dérivable, telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

f étant dérivable en a , calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(a + 3h) - f^2(a - h)}{h}$

EXERCICE 6 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier l'application f définie par $f(x) = \arctan \frac{x}{x+1} + \arctan \frac{x}{x-1} - \arctan \frac{1}{2x^2}$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

- En dehors de $x = 0$ et $x = -1$: utiliser la dérivée logarithmique.
- Au voisinage de 0 : utiliser $\varepsilon = \pm 1$ pour que $x = \varepsilon |x|$.
Considérer les cas $r > 1$, $r = 1$, $0 < r < 1$, $r = 0$ et $r < 0$.
- Au voisinage de -1 : considérer les mêmes cas que ci-dessus.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Développer et simplifier $f(x)$ avant de chercher à dériver.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Si on note $\varepsilon = \pm 1$ le signe de $\cos \sqrt{x}$, on trouve $f'(x) = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x}(1 - \sin \sqrt{x})}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Traiter d'abord le cas $\ell = 0$: pour $\varepsilon > 0$, utiliser $a > 0$ tel que $x \geq a \Rightarrow |f'(x)| \leq \varepsilon$.

En déduire $|f(x)| \leq |f(a)| + \varepsilon(x - a)$ pour $x \geq a$.

Dans le cas général (ℓ dans \mathbb{R}), poser $g : x \mapsto g(x) = f(x) - \ell x$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Au voisinage de $x = 0$ on a le développement limité $f(a + x) = f(a) + xf'(a) + o(x)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

On trouve $f'(x) \equiv 0$, ce qui veut dire que f est constante *par intervalles*.